

Niepewność standardowa oceny funkcji korelacji wzajemnej wyznaczanej metodą warunkowej wartości średniej modułu sygnału

Streszczenie. W artykule przedstawiono zastosowanie warunkowej wartości średniej modułu sygnału do wyznaczania unormowanej funkcji korelacji wzajemnej $\rho_{xy}(\tau)$ skorelowanych sygnałów losowych o rozkładzie normalnym. Wykazano, że proponowana metoda charakteryzuje się mniejszą niepewnością standardową niż metoda bezpośrednia w zakresie $0,502 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$. Podano przykład zastosowania omawianej metody do estymacji opóźnienia transportowego.

Abstract. The paper presents the use of the conditional expected value of the signal's absolute value to determine the normalized cross-correlation $\rho_{xy}(\tau)$. It was shown that proposed method has a smaller standard uncertainty than the direct method in the range $0,502 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$. (Standard uncertainty evaluation of the cross-correlation function obtained using conditional average value of signal's absolute value).

Słowa kluczowe: sygnały przypadkowe, korelacja wzajemna, warunkowe uśrednianie, niepewność standardowa.

Keywords: random signals, cross-correlation, conditional averaging, standard uncertainty.

doi:10.12915/pe.2014.01.11

Wstęp

Estymacja funkcji korelacyjnych i ocena skorelowania danych są ważnymi, często występującymi i aktualnymi operacjami w przetwarzaniu sygnałów pomiarowych [1, 2, 6 - 10]. Najczęściej w celu otrzymania estymatorów funkcji korelacji stosowane są metody bezpośrednie: iloczynowa i znakowa oraz metoda wykorzystująca DFT [1, 2, 6 - 8].

Unormowaną funkcję korelacji wzajemnej (FK) dla stacjonarnych centrowanych sygnałów $x(t)$ i $y(t)$

o wariancjach σ_x^2 , σ_y^2 określa wyrażenie:

$$(1) \quad \rho_{xy}(\tau) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt.$$

W praktyce pomiarowej wyznacza się estymatory funkcji danej zależnością (1).

W pracach [3, 4, 6] dla wzajemnie opóźnionych sygnałów losowych $x(t)$ i $y(t)$ o rozkładach normalnych podano zależność łączącą warunkową wartość oczekiwaną modułu (WWOM) sygnału $z(t) = |y(t)|$ i funkcję $\rho_{xy}(\tau)$ dla warunku $x(t) = 0$:

$$(2) \quad \begin{aligned} E[y(t+\tau)|x(t)=0] &= E[z(t+\tau)|x(t)=0] = \\ &= m_z|_{x=0}(\tau) = \sigma_y \sqrt{\frac{2}{\pi} [1 - \rho_{xy}^2(\tau)]} \end{aligned}$$

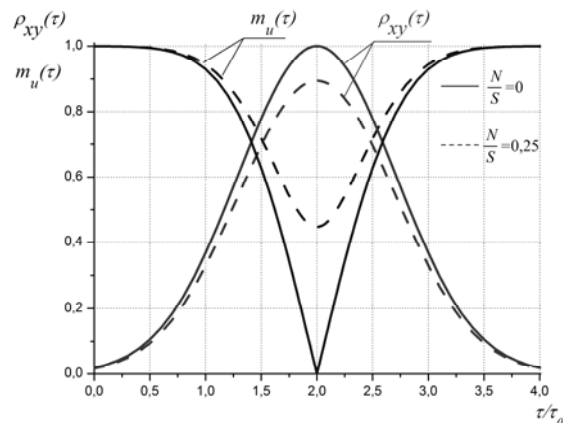
oraz wyrażenie dla wariancji warunkowo uśrednianego sygnału $z(t)$:

$$(3) \quad \sigma_{z|_{x=0}}^2(\tau) = \sigma_y^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) (1 - \rho_{xy}^2(\tau)).$$

Na rysunku 1 pokazano przykłady przebiegu funkcji korelacji $\rho_{xy}(\tau)$ oraz unormowanej funkcji WWOM:

$$(4) \quad m_u(\tau) = \frac{m_z|_{x=0}(\tau)}{(m_z|_{x=0}(\tau))_{\max}} = \sqrt{1 - \rho_{xy}^2(\tau)},$$

przy różnych stosunkach szumu do sygnału (N/S) dla względnego opóźnienia $\tau/\tau_0 = 2$ [4]. Sygnał $y(t)$ był zakłócony szumem addytywnym $n(t)$ o rozkładzie $N(0, \sigma_n)$. Linia ciągłą przedstawiono wykresy dla $N/S = 0$, a przerywaną dla $N/S = 0,25$.



Rys. 1. Przykładowe przebiegi unormowanych funkcji FK i WWOM

W dalszej części artykułu przeprowadza się analizę estymacji unormowanej FK za pomocą WWOM. W celu uproszczenia zapisów w następnych zależnościach przyjęto $z(t) = z$, $x(t) = x$, $\rho_{xy}(\tau) = \rho_{xy}$, $m_z|_{x=0}(\tau) = m_z$.

Niepewność standardowa oceny FK za pomocą WWOM

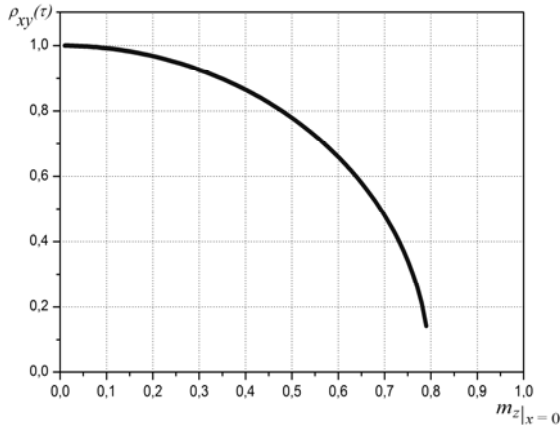
Zależność (2) można zastosować do wyznaczania unormowanej funkcji korelacji wzajemnej. Z wyrażenia (2) wynika, że:

$$(5) \quad \rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{m_z}{\sigma_y} \right)^2} = f(m_z).$$

Wykres zależności (5) przedstawia rysunek 2. Wartość oczekiwana zmiennej ρ_{xy} jest równa:

$$(6) \quad E[f(m_z)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(m_z) p(m_z) dm_z,$$

gdzie: $p(m_z)$ - rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej m_z o wartości oczekiwanej $\bar{m}_z$ i wariancji $\sigma_{m_z}^2$.



Rys. 2. Charakterystyka $\rho_{xy} = f(m_z|_{x=0})$

Dla funkcji $\rho_{xy} = f(m_z)$ dostatecznie „gładkiej” w otoczeniu $m_z = 0$ (rys. 2), stosując rozwinięcie w szereg i zachowując tylko trzy pierwsze wyrazy otrzymuje się:

$$(7) \quad f(m_z) \approx f(\bar{m}_z) + f'(\bar{m}_z)(m_z - \bar{m}_z) + \frac{1}{2} f''(\bar{m}_z)(m_z - \bar{m}_z)^2$$

a po podstawieniu do wzoru (6):

$$(8) \quad E[f(m_z)] \approx f(\bar{m}_z) + f''(\bar{m}_z) \frac{\sigma_{m_z}^2}{2}.$$

Uwzględniając, że:

$$(9) \quad [f^2(m_z)]'' = 2[f'(\bar{m}_z)]^2 + 2f(m_z)f''(m_z),$$

przez analogię można otrzymać z (8):

$$(10) \quad E[f^2(m_z)] \approx f^2(\bar{m}_z) + \left\{ [f'(\bar{m}_z)]^2 + 2f(\bar{m}_z)f''(\bar{m}_z) \right\} \frac{\sigma_{m_z}^2}{2}.$$

Ponieważ:

$$(11) \quad Var[f(m_z)] = E[f^2(m_z)] - E^2[f(m_z)].$$

więc ostatecznie z wyrażeń (8), (10) i (11) po odrzuceniu składnika zawierającego drugą potęgę wariancji $\sigma_{m_z}^2$ uzyskuje się:

$$(12) \quad Var[f(m_z)] \approx [f'(\bar{m}_z)]^2 \sigma_{m_z}^2.$$

Jeżeli estymacji m_z dokonuje się uśredniając N kolejnych nieskorelowanych wartości sygnału, to:

$$(13) \quad \hat{\sigma}_{m_z}^2 = \frac{\sigma_z^2|_{x=0}}{N}$$

Wstawiając wyrażenia (3), (5) i (13) do wzoru (12) otrzymuje się:

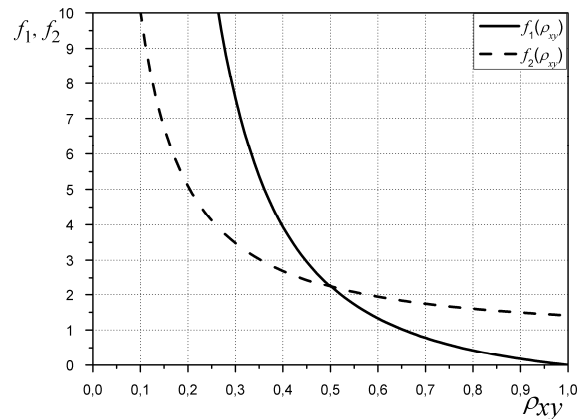
$$(14) \quad Var[f(m_z)] = Var[\hat{\rho}_{xy}] = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{N} \left(\frac{1 - \rho_{xy}^2}{\rho_{xy}}\right)^2.$$

Względną niepewność standardową oceny unormowanej FK określa wyrażenie:

$$(15) \quad u_1 = \frac{\sqrt{Var(\hat{\rho}_{xy})}}{\rho_{xy}} \approx \frac{0,75}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\rho_{xy}^2} - 1 \right).$$

Na rysunku 3 przedstawiono skorygowaną niepewność standardową $u_1\sqrt{N} = f_1(\rho_{xy})$. Celem porównania na tym samym rysunku przedstawiono linią kreskową zależność $u_2\sqrt{N} = f_2(\rho_{xy})$ uwzględniającą względną niepewność standardową u_2 bezpośredniej metody wyznaczania funkcji korelacji wykorzystującej mnożenie N nieskorelowanych par wartości sygnałów $x(t)$ i $y(t)$. Zależność tę opisuje wzór [2]:

$$(16) \quad f_2(\rho_{xy}) = \sqrt{\frac{1}{\rho_{xy}^2} + 1}.$$



Rys. 3. Wykresy skorygowanych niepewności standardowych ocen unormowanej funkcji korelacji $\hat{\rho}_{xy}$ z wykorzystaniem WWOM - $f_1(\rho_{xy})$ oraz mnożenia i uśredniania cyfrowego - $f_2(\rho_{xy})$

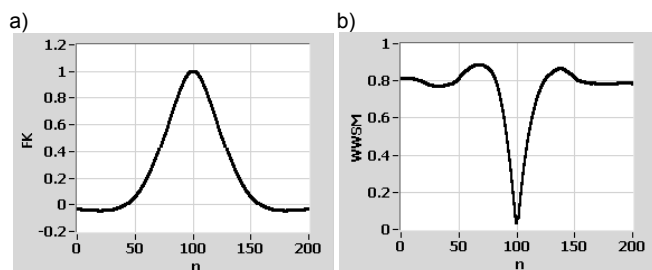
Na podstawie obliczeniowego porównania zależności $f_1(\rho_{xy})$ i $f_2(\rho_{xy})$ można stwierdzić, że w zakresie wartości unormowanej funkcji korelacji $0,502 \leq \rho_{xy} \leq 1$ proponowana metoda jest efektywniejsza.

Przykład zastosowania omawianej metody do estymacji opóźnienia transportowego

Badania symulacyjne prowadzono przy zastosowaniu aplikacji zrealizowanej w środowisku LabVIEW [4]. Generowano dwa wzajemnie opóźnione sygnały stochastyczne $x(t)$ i $y(t)$ o rozkładach normalnych, a następnie biorąc wzajemnie nieskorelowane pary próbek tych sygnałów wyznaczano dyskretny estymator FK i WWOM dla zadawanych wartości stosunku N/S . Przyjęto liczbę próbek 200 000, odchylenie standardowe sygnału $\sigma_x = 1$ i opóźnienie transportowe τ_0 równe 100 próbek. Na rysunku 4 pokazano przykładowe przebiegi otrzymanych charakterystyk FK i WWSM (warunkowa wartość średnia modułu – estymator WWOM) dla $\sigma_n = 0$ ($N/S = 0$). Otrzymane wyniki potwierdzają przebieg zależności teoretycznych podanych na rysunku 1.

W pracy [5] podano sposób i przykład oszacowania wartości niepewności standardowych oceny opóźnienia transportowego $\hat{\tau}_0$ przy zastosowaniu FK i WWSM dla następujących parametrów analizy pasmo częstotliwości

sygnałów: $B = 100$ Hz, czas analizy: $T = 0,5$ s, $N/S = 0,25$, liczba warunkowych uśrednień: $M \approx 2BT = 100$. Dodatkowo w obliczeniach założono, że odchylenia $\Delta\tau_{0i}$ od wartości τ_0 kolejnych estymat τ_{0i} mogą być opisane modelem $N(0; \sigma_{\Delta\tau_0})$.



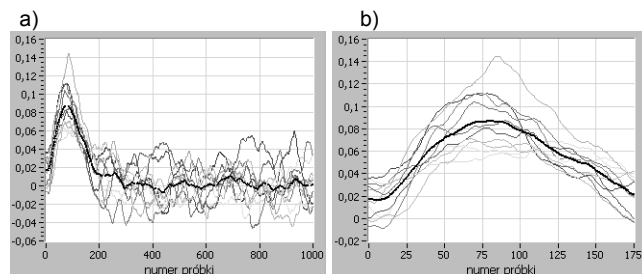
Rys. 4. Funkcje korelacji (FK) i warunkowej wartości średniej modułu (WWSM) uzyskane z modelowania [4]

Dla opisywanej w artykule zasady wyznaczania $\rho_{xy}(\tau)$ przeprowadzono oszacowanie $\sigma_{\Delta\tau_0}$. Niepewności standardowe dla metod FK, WWSM i WWS (warunkowa wartość średnia, metoda opisana w [5]) przy założonych parametrach analizy przedstawia tabela 1. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że przy zastosowaniu warunkowego uśredniania sygnałów uzyskuje się kilkukrotnie mniejsze wartości niepewności pomiaru opóźnienia transportowego niż w przypadku metody korelacyjnej.

Tabela 1. Niepewność standardowa oceny τ_0

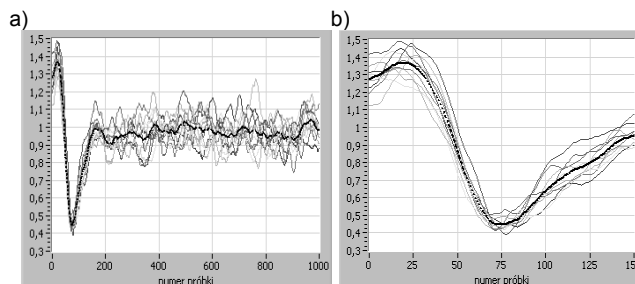
Metoda	FK	WWSM	WWS
Niepewność standardowa $\sigma_{\Delta\tau_0}$	1,15 ms	0,38 ms	0,47ms

Badania eksperymentalne realizowano na stanowisku do analizy sygnałów. Było ono wyposażone m. in. w generatory napięciowych sygnałów losowych, układy opóźnienia sygnałów, system akwizycji danych (komputer klasy PC z kartą pomiarową NI PCI-6143 oraz oprogramowaniem), generator funkcyjny i oscyloskop cyfrowy. W przeprowadzonych eksperymentach dla parametrów: $M = 30$, $\sigma_{Xt} \approx \sigma_{nt} \approx 0,3$ V, $\tau_0 = 75 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 15$ ms wyznaczono dziesięć estymat charakterystyk FK i WWSM oraz średnie przebiegi estymat (pogrubione linie na rys. 5 i rys. 6).



Rys. 5. Estymaty funkcji korelacji (FK). Wartości FK podano w $[V^2]$

Sygnały próbkowano ze stałym odstępem $T_p = 0,2$ ms. Widoczna jest wyraźnie większa wariancja charakterystyki korelacyjnej w punkcie i w otoczeniu punktu opóźnienia transportowego τ_0 (rysunki 5b i 6b przedstawiają powiększenie charakterystyk FK i WWSM w otoczeniu punktu τ_0) [5].



Rys. 6. Charakterystyki warunkowej wartości średniej modułu (WWSM). Wartości WWSM podano w $[V]$

Wnioski

W zastosowaniach praktycznych do oceny skorelowania danych pomiarowych o rozkładach normalnych mogą być wykorzystane operacje warunkowego uśredniania danych.

W artykule przedstawiono zastosowanie warunkowej wartości oczekiwanej funkcji korelacji wzajemnej i wykazano, że proponowana metoda charakteryzuje się mniejszą niepewnością standardową niż metoda bezpośrednia w zakresie $0,502 \leq \rho_{xy} \leq 1$. Proponowany model przetwarzania danych można zastosować do wyznaczania unormowanej FK sygnałów istotnie skorelowanych (np. w pomiarach czasu opóźnienia i prędkości metodą korelacyjną).

LITERATURA

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G., Random data – analysis and measurement procedures. John Wiley, New York, 2000
- [2] Mirski G.J., Charakteristiki stochastycznej wzajemności i ich izmierienia. Energoizdat, Moskwa, 1982
- [3] Kowalczyk A., Regresyjna zasada pomiaru prędkości. *Aparatura Naukowa i Dydaktyczna*, nr 3-4, 1989
- [4] Kowalczyk A., Hanus R., Szlachta A., Investigation of the statistical method of time delay estimation based on conditional averaging of delayed signal, *Metrology and Measurement Systems*, Vol. XVIII (2011), n. 2, 335–342
- [5] Kowalczyk A., Szlachta A., Zastosowanie warunkowego uśredniania sygnałów do pomiaru opóźnienia transportowego. *Przegląd Elektrotechniczny*, 86(2010), nr 1, 225–228
- [6] Hanus R., Accuracy comparison of some statistic methods of time delay measurements. *Systems Analysis Modelling Simulation*, Vol. 40(2001), n. 2, 239–244
- [7] Lal-Jadziak J., Sienkowski S., Cross-correlation function determination by using deterministic and randomized quantization. *Przegląd Elektrotechniczny*, 89(2013), nr 1a, 81–83
- [8] Gajewski J.B., Accuracy of cross correlation velocity measurements in two-phase gas–solid flows. *Flow Measurement and Instrumentation* Vol. 30(2013), 133–137
- [9] Dorozhovets M., Warsza Z., Wyznaczanie niepewności typu A pomiarów o skorelowanych rezultatach obserwacji. *Pomiary, Automatyka, Kontrola*. 2007, nr 2, 20–24
- [10] Hartman M., Hashad M., Korelacyjne funkcje mocy jako nowa propozycja opisów stanów energetycznych w obwodach z okresowymi przebiegami napięcia i prądu. *Przegląd Elektrotechniczny*, 84(2010), nr 1

Autorzy: dr hab. inż. Adam Kowalczyk, prof. PRz, Politechnika Rzeszowska, Katedra Metrologii i Systemów Diagnostycznych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: kowadam@prz.edu.pl;
dr inż. Anna Szlachta, Politechnika Rzeszowska, Katedra Metrologii i Systemów Diagnostycznych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: annasz@prz.edu.pl;
dr inż. Robert Hanus, Politechnika Rzeszowska, Katedra Metrologii i Systemów Diagnostycznych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: rohan@prz.edu.pl