Eugenij VOLODARSKY [1], Zygmunt WARSZA [2], Larysa KOSHEVA [3]

Narodowy Uniwersytet Techniczny Ukrainy - Politechnika Kijowska (1), Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów (PIAP) Warszawa (2), Narodowy Uniwersytet Lotnictwa, Kijów Ukraina (3)

Pomiar stosunku dwu wielkości metodą iteracyjną

Streszczenie. *Omówiono iteracyjną metodę pomiaru wartości stosunku dwu wielkości charakteryzujących obiekt badany, tj. jego wielkości wyjściowej i wielkości wejściowej stanowiącej odniesienie - dzielna i dzielnik ilorazu. Podano sposób realizacji tej metody polega na poprzedzającym operację dzielenia kolejnym przetwarzaniu sygnałów obu tych wielkości we wspólnym torze pomiarowym i iteracyjnym przybliżaniu ich poziomów za pomocą przetwornika skali dla jednego z tych sygnałów. Dzięki temu uzyskuje się istotne zmniejszenie wpływu addytywnych i multiplikatywnych składowych błędów oraz nieliniowości i parametrów nie-informacyjnych toru przetwarzania na wynik pomiaru wartości stosunku obu wielkości.*

Abstract. *Measurement method of the ratio of two values describing the tested object is considered. In this ratiometric conversion the signal of output value of object and signal of its input reference value are sequentially passed by the same measurement channel. In the conversion of informative parameters of both signals the influence of additive, multiplicative and nonlinearity errors are minimized by iterative successive regulation of the level* of one of *signals to common value* (***Measurement of the ratio of two quantities by the iterative method***).

Słowa kluczowe: pomiar stosunku dwu wielkości, przetwarzanie iteracyjne, wspólny tor pomiarowy, inwariantność
Keywords: measurement of ratio of two quantities, iterative conversion, common measurement channel,

doi:10.12915/pe.2014.06.46

Wstęp

Wiele z wielkości, które charakteryzują funkcjonalność i jakość obiektu technicznego otrzymuje się jako wynik pomiaru stosunku dwu wielkości fizycznych: s na wejściu i x na wyjściu obiektu. Równanie pomiaru ma postać

(1) $$a = x/s\,.$$

Wielkość wejściowa s stanowi odniesienie, zaś mierzony stosunek nazywa się też wielkością względną. Przykładem najprostszym wielkości względnej jest współczynnik przetwarzania tej samej wielkości fizycznej, np. dla dzielnika rezystancyjnego, wzmacniacza operacyjnego, lub współczynnik skali dla różnych zakresów przyrządu.

Wartość wielkości względnej wyznacza się w praktyce z pomiaru ilorazu parametrów informacyjnych dwu sygnałów: sygnału $\varphi_2(x)$ wielkości x występującej na wyjściu obiektu badanego i sygnału $\varphi_1(s)$ od wielkości odniesienia s oddziałującej na jego wejściu (dzielnik i dzielna ilorazu). Iloraz ten obarczony jest statytycznymi i przypadkowymi błedami przetwarzania. Przypadek najprostszy pomiaru wielkości względnej występuje wtedy, gdy warunki eksperymentu umożliwiają wyznaczenie jej wartości a dla pewnej znormalizowanej wielkości wejściowej s=*const*. Wykonuje się wówczas bezpośredni pomiar sygnału dzielnej $x=a$. Dotyczy to np. kontroli rezystorów lub współczynnika wzmocnienia wzmacniaczy operacyjnych. Przy s=*const*. wynik pomiaru wartości a realizuje się przez pomiar parametru informacyjnego sygnału wyjściowego x z badanego obiektu. Dokładność wyniku zależy od błędów w torze pomiarowym, a także od dokładności i stabilności sygnału s wielkości utworzonej na wejściu obiektu, która powinna spełniać wysokie wymagania metrologiczne.

Jednakże w realizacji takich zadań, jak monitorowanie parametrów względnych i charakterystyk poszczególnych modułów w procesie eksploatacji złożonych obiektów, wartość s dla tych modułów nie będzie stała. Do tego rodzaju zadań należy też diagnostyka złożonych obiektów służąca wykryciu tego wewnętrznego modułu, którego nieprawidłowe działanie doprowadziło do niesprawności całego obiektu. Tutaj nie można już, tak jak w poprzednim przykładzie, utworzyć wartości znormalizowanej wielkości wejściowej s=*const* i nie ma możliwości bezpośredniego pomiaru na wyjściu wielkości względnej x. W tym przypadku należy mierzyć parametry informacyjne sygnałów obu wielkości: wejściowej s i wyjściowej x, zaś wartość a wielkości względnej wyznaczać jako wynik ich ilorazu tych parametrów. Taką procedurę ustalania wartości wielkości względnej nazywa się przetwarzaniem ilorazowym (lub logometrycznym). Dzielenie sygnałów można realizować na drodze instrumentalnej lub obliczeniowej. Dokładność zależy od błędów torów pomiarowych sygnałów wielkości wyjściowej x i wejściowej s. Błędy te mogą być szczególnie duże dla tych wielkości, dla których nie ma możliwości pomiaru bezpośredniego, zaś tor pomiarowy wewnątrz badanego obiektu obejmuje drogę sygnału od miejsca ich występowania poprzez inne niż pomiarowe, człony obiektu. Dokładność metody i wyniku pomiaru wielkości względnej wyraża się, tak, jak i dla innych wielkości przez poprawność i precyzję [1], bądź wg. Przewodnika GUM [2] przez niepewność dla próbki obserwacji niezależnych. Przy istnieniu autokorelacji w próbcewyznacza się jej efektywną liczbę pomiarów [3].

Metrologiczne właściwości metody ilorazowej

Właściwości metrologiczne przetwarzania ilorazowego zależą od rzeczywistych parametrów obu torów pomiarowych. Różnią się one od ich wartości nominalnych wskutek niedoskonałości konstrukcji, występowania zakłóceń zewnętrznych i wewnętrznych, wpływów nie-informacyjnych parametrów sygnałów i zmian parametrów informacyjnych odtwarzających wielkość względną a. Bieżącym wynik przetwarzania to

(2) $$\hat{a} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(s)},$$

gdzie: $\hat{a}$ - rzeczywista funkcja przetwarzania ilorazowego , $\varphi_2(x)$ i $\varphi_1(s)$ -funkcje różniące się od nominalnych, opisujące rzeczywiste sygnały wielkości x i s.

Dla ilorazu (2) bieżące błędy względne dzielnej i dzielnika odejmują się

(3) $$\delta_{\hat{a}} = \delta_{\varphi 2} - \delta_{\varphi 1}$$

gdzie: δ_a , $\delta_{\varphi 2}, \delta_{\varphi 1}$ - odpowiednio bieżące błędy względne wielkości $\hat{a}$ i funkcji $\varphi_2(x), \varphi_1(s)$.

Po rozwinięciu rzeczywistej funkcji przetwarzania $\hat{a}$ w szereg Mac Laurina , otrzymuje się

(4) $$\hat{a} \cong a\left[1 + (\delta_x - \delta_s) + (\gamma_x - \gamma_s) + (\xi_x - \xi_s)\right]$$

gdzie: δ_x , δ_s; γ_x , γ_s; ξ_x , ξ_s - kolejno względne składowe: addytywne, multiplikatywne i nieliniowości rzeczywistych funkcji przetwarzania $\varphi_2(x)$, $\varphi_1(s)$ sygnałów.

Dokładność przetwarzania ilorazowego można poprawić przez zastosowanie doskonalszych środków pomiarowych. Alternatywa tej tradycyjnej metody wynika z (4). Jeśli wartości parametrów δ_x, δ_s, γ_x, γ_s oraz ξ_x, ξ_s uczyni się tak bliskie siebie, jak to jest tylko możliwe, to ich wpływ na wynik $\hat{a}$ zmniejszy się istotnie, gdy spełnią one warunki

(5) $$(\delta_x - \delta_s) \to 0\,; \quad (\gamma_x - \gamma_s) \to 0\,; \quad (\xi_x - \xi_s) \to 0$$

Trzeba więc zapewnić jednakowe oddziaływania parametrów obu torów pomiarowych na ich sygnały jako dzielną i dzielnik ilorazu. Jest to szczególny przypadek zasady inwariantności, którą w latach 60-tych ubiegłego wieku sformułował rosyjski akademik B. N. Petrov [4], [5].

Uzyskanie na bieżąco takiego samego wpływu zewnętrznych czynników zakłócających na sygnały dzielnej i dzielnika ilorazu wymaga ścisłego związku pomiędzy tymi oddziaływaniami w obu torach. Jeśli oddziaływania te są stabilne nawet w dość krótkich okresach czasu, to najbardziej właściwym rozwiązaniem jest użycie po kolei tego samego toru pomiarowego dla wielkości x i s. Wówczas zaniknie składowa błędu przetwarzania spowodowana nie-identycznością obu torów, jak również wpływem nie-informacyjnych parametrów sygnałów odtwarzających wartość wielkości względnej.

Metodę eliminację wpływów informacyjnych parametrów sygnałów przez doprowadzenie do ich równoważnego oddziaływania na wynik opracował E. Volodarski [6], [7]. Rozpatrzymy ją bardziej szczegółowo.

Z (5) wynika, że wpływy te skompensują się całkowicie, gdy wartości informacyjnych parametrów sygnałów tworzących wielkość względną będą takie same, tzn. dla $\hat{a} = a$. Uzyskać to można dla $a = 1$, jeśli zastosuje się sposób zrównywania poziomu sygnałów w torach dzielnej i dzielnika, niezależny od początkowego stosunku *x* i *s*. W tym celu do jednego z torów, dzielnej lub dzielnika, należy wprowadzić regulowany przetwornik skali, który będzie dostosowywać poziom sygnału tego toru do poziomu w drugim torze. Wartość a kontrolowanej wielkości względnej dla różnych obiektów będzie się zmieniać i nie uzyska się jednakowego oddziaływania parametrów sygnałów, tj. równej zeru różnicy składowych addytywnych błędów względnych $(\delta_X - \delta_S) \to 0$ i nieliniowości $(\xi_X - \xi_S) \to 0$.

Algorytm iteracyjnej metody przetwarzania ilorazowego

Rozpatrzymy przypadek $a>1$. Zrównania poziomów parametrów informacyjnych sygnałów pomiarowych $\varphi_2(x)$ i $\varphi_1(s)$ przed ich ilorazowym przetwarzaniem można zrealizować dwoma sposobami. W pierwszym przypadku należy doprowadzić wartość sygnału $\varphi_2(x)$ jako dzielnej do wartości $\varphi_1(s)$. Współczynnik przetwarzania skali sygnału w torze x będzie mniejszy od jedności, tj. $K_{ST} < 1$. Można więc zastosować przetwornik pasywny ST.

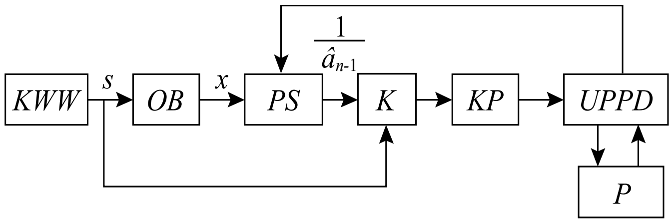
W drugim przypadku można zwiększyć wartość sygnału odniesienia $\varphi_1(s)$ do poziomu sygnału $\varphi_2(x)$, tj. $K_{ST} > 1$ i przetwornik ST w torze dzielnika powinien być aktywny. Ponieważ przetwornik pasywny ST zwykle bywa bardziej dokładny, to pierwszy przypadek jest korzystniejszy.

Natomiast, gdy wartość wielkości względnej $a < 1$, to przetwornik pasywny ST powinno się włączyć w torze wielkości wejściowej s, by doprowadzać poziom sygnału $\varphi_1(s)$ do poziomu sygnału wielkości wyjściowej $\varphi_2(x)$.

Tak więc, należy stworzyć kilka algorytmów do śledzenia wartości sygnałów, aby bez względu na początkowy stosunek wartości x i s można było by uzyskać podobny skutek - zrównanie poziomu obu sygnałów.

Schemat blokowy układu do realizacji przetwarzania ilorazowego wraz z iteracyjnym sposobem zrównywania poziomu sygnałów, przedstawiono na rysunku 1. W stanie początkowym układu (K_{ST}=1) następuje przetworzenie zmierzonych wartości i bezpośrednie wyznaczanie pierwszej wartości wielkości względnej.

(6) $$\hat{a}_1 = \frac{\varphi(a \cdot s)}{\varphi(s)}$$



Rys.1. Schemat blokowy iteracyjnego przetwarzania ilorazowego: *KWW* – kondycjoner wielkości wejściowej; *OB* – obiekt badany; *KP* – tor (kanał) pomiarowy; *PS* – przetwornik skali; *K* – komutator; *UPPD* –urządzenie przetwarzająco - decyzyjne; *P* – pamięć.

Wynik $\hat{a}_1$ zawiera początkową informację o relacji między poziomami sygnałów odtwarzających wielkości s i x. Wartość $\hat{a}_1$ wprowadza się do pamięci P i służy ona do sterowania przetwornikiem ST tak, aby ustawić jego współczynnik przetwarzania K_{ST} jako odwrotnie proporcjonalny do $\hat{a}_1$. W następnym kroku metody ilorazowej na wejście toru KP dostarcza się wartości $\frac{\hat{a}s}{\hat{a}_1} = \frac{x}{\hat{a}_1}$ oraz s. Wynik bezpośredniego ilorazowego przetworzenia wielkości doprowadzonych do KP $z_2 = \varphi\left(\frac{\hat{a}s}{\hat{a}_1}\right)\Big/\varphi(s)$ mnoży się przez wartość $\hat{a}_1$ pobraną z pamięci P i uzyskuje się kolejne dokładniejsze oszacowanie wartości wielkości względnej $\hat{a}_2 = \varphi\left(\frac{\hat{a} \cdot s}{\hat{a}_1}\right)\frac{\hat{a}_1}{\varphi(s)}$. Wynik $\hat{a}_2$ również wprowadza się do pamięci P, by można go wykorzystać do zmiany współczynnika K_{ST} w kroku następnym iteracji. Wykonując podobnie kolejne kroki procedury iteracyjnej, otrzymuje się zależność rekurencyjną

(7) $$\hat{a}_n = \frac{\varphi\left(\frac{\hat{a}s}{\hat{a}_{n-1}}\right)}{\varphi(s)} \cdot \hat{a}_{n-1}.$$

Przykład

Niech rzeczywista charakterystyka przetwarzania wielkości x ma dodatni błąd addytywny

(8) $$\varphi(x) = (x + \Delta)(1 + \gamma).$$

Z (8) wynika, że błąd multiplikatywny γ funkcji $\varphi(x)$ nie wpływa na wynik, gdy dla obu wielkości stosuje się układ o strukturze w postaci pojedynczego toru pomiarowego. Wpływ tego błędu jest taki sam dla sygnałów x i s. Wynik przetwarzania można więc zapisać jako

(9) $$\hat{a}_1 = as\left(1 + \frac{\Delta}{as}\right)\Big/ s\left(1 + \frac{\Delta}{s}\right) = \frac{a(1 + \delta / a)}{(1 + \delta)}$$

gdzie $\delta = \frac{\Delta}{s}$

Z (9) wynika, że równość $\hat{a}_1 = a$ zachodzi tu tylko dla $a = 1$. Wzór (9) można przekształcić do postaci

(10) $$\hat{a}_1 = a + \frac{as + \Delta}{s + \Delta} - a = a - \frac{\delta}{1 + \delta}(a - 1).$$

Po oznaczeniu $\nabla = \delta/(1+\delta)$, (10) przyjmie prostszą postać

(11) $$\hat{a}_1 = a - \nabla(a-1).$$

Z (10) wynika, że dla $a \geq 1$ i dodatniego błędu addytywnego początkowy wynik przetwarzania ilorazowego będzie mniejszy od wartości rzeczywistej. Po przeanalizowaniu wpływów dodatniego błędu addytywnego na przetwarzanie w torze KP, dla następnych kroków iteracji otrzymuje się zależność rekurencyjną

(12) $$\hat{a}_n = a - \nabla^n (a-1).$$

Z (12) wynika, że metoda ilorazowa charakteryzuje się przesunięciem wyniku (ang. *bias*), nazywanym wg [1] jego *poprawnością*. Przesunięcie wielkości względnej otrzymywanej z przetwarzania ilorazowego jest ujemne, a jego wartość wyraża drugi składnik w (12).

Warunek zbieżności ocen $\hat{a}_n$ do wartości prawdziwej a to:

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{a}_n - a| = 0$$

lub

$$\nabla = \delta/(1-\delta) < 1$$

Dla dodatniej składowej addytywnej błędu funkcji przetwarzania toru KP warunek ten jest zawsze spełniony.

Tempo zbieżności (liczba kroków iteracji do zadawalającego błędu przetwarzania δ_a) zależy od wartości błędu względnego δ. Czym większe δ, tym niższe tempo zbieżności. Na przykład dla a=10, wartości wielkości wejściowej $s = 1$ i bezwzględnego błędu addytywnego toru pomiarowego KP $\Delta = 0{,}1$ (czyli $\delta = 0{,}1$), otrzyma się sekwencję wyników: $\hat{a}_1 = 9{,}18$; $\hat{a}_2 = 9{,}925$; $\hat{a}_3 = 9{,}993$. Zaś dla $\Delta = 0{,}2$, ($\delta = 0{,}2$) sekwencja wynosi: $\hat{a}_1 = 8{,}5$; $\hat{a}_2 = 9{,}75$; $\hat{a}_3 = 9{,}958$. Oba te ciągi wykazują na skuteczność omawianego sposobu przetwarzania.

W rozpatrywanej metodzie wartość $\hat{a}_1$ służy do określania początkowej wartości w pierwszym kroku iteracji. Tak więc, gdy $\delta = 0{,}1$, to wartość $\hat{a}_1 = 9{,}18$ określa bezpośrednio wielkość względną wg wyrażenia (6). Błąd względny w tym przypadku wynosi aż 8,2%. W drugim kroku otrzymuje się bliższą rzeczywistej wartość wielkości względnej $\hat{a}_2 = 9{,}925$, czyli błąd δ_a wynosi 0,75 %, a w trzecim kroku iteracji będzie już tylko 0,07%. Dla $\delta = 0{,}2$, aby osiągnąć ten sam rząd dokładności, potrzeba kilku więcej kroków iteracji.

Dla ujemnego błędu addytywnego KP

$$\varphi(x) = (x - \Delta)(1+\gamma)$$

Wyrażenie (10) ma teraz postać :

(13) $$a_n = a + (-1)^{n+1} \tilde{\nabla}^n (a-1)$$

gdzie $\tilde{\nabla} = \delta/(1-\delta)$.

Wynik bezpośredniego (tj. pierwszego) przetworzenia wielkości względnej będzie teraz większy od wartości rzeczywistej. W procesie iteracyjnym będzie następnie zmieniał się znak. Dla $\tilde{\nabla}$ < 1, co odpowiada $\delta < 1/2$, kolejne rezultaty będą jednak dążyć do wartości prawdziwej a.

W przykładzie tym dla δ=0,2 z (13) otrzyma się sekwencję wyników: $\hat{a}_1 = 12{,}25$, $\hat{a}_2 = 10{,}56$, $\hat{a}_3 = 10{,}14$, a dla δ=0,5 wystąpi sekwencja: $\hat{a}_1 = 19{,}0$, $\hat{a}_2 = 1{,}0$, $\hat{a}_3 = 19{,}0$, tzn. występuje proces cykliczny. Jeśli więc $\delta > 0{,}5$ to proces iteracyjny staje się rozbieżny. Powyższe wnioski należy uwzględnić przy wyborze środków pomiarowych, aby ich błędy systematyczne zapewniały zbieżność metody przetwarzania ilorazowego. Można też postawić wymaganie dotyczące tempa iteracji, tj. liczby kroków niezbędnych do uzyskania żądanej dokładności wartości względnej.

Dla nieliniowej charakterystyki przetwarzania, nawet przy strukturze o wspólnym torze pomiarowym, różnica poziomów sygnałów tworzących wielkość względną prowadzi do niespełnienia warunku jednakowych ich oddziaływań. Wprowadzenie przetwornika skali do przetwarzania sygnału dzielnej i wykorzystywanie procedury iteracyjnej prowadzi do spełnienia tego warunku. Jednakże, należy konieczne wprowadzać ograniczenia dotyczące nieliniowości. Przedstawiając związek rekurencyjny (7) jako

$$\hat{a}_n = \frac{\varphi\left[s + \dfrac{s(a - \hat{a}_{n-1})}{\hat{a}_{n-1}}\right]}{\varphi(s)} \cdot \hat{a}_{n-1}$$

i rozwijając go w szereg Taylora wokół wartości s, otrzyma się warunek zbieżności procedury iteracyjnej

(14) $$0 < \left| \frac{\varphi'(\hat{a}_{n-1} \cdot s) \cdot s \cdot \hat{a}_{n-1}}{\varphi(\hat{a}_{n-1} \cdot s)} \right| < 2$$

Z (14) wynika, że nieliniowość nie powinna przekraczać wyrazu rzędu drugiego w rozwinięciu w szereg funkcji φ.

Podsumowanie

Iteracyjna metoda ilorazowa stanowi skuteczne narzędzie do wyznaczaniu wartości wielkości względnej.

Dla wspólnego toru pomiarowego umożliwia ona uzyskanie zmniejszenia wpływu błędów addytywnych, multiplikatywnych oraz nieliniowości, jeśli doprowadza się do niego kolejno sygnały od wejściowej wielkości odniesienia i wielkości wyjściowej badanego obiektu oraz wyrównaje się iteracyjnie poziom obu sygnałów.

W tej metodzie iteracyjnej współczynnik zmiany skali w bieżącym kroku wyznacza sie na podstawie wyniku otrzymanego w kroku poprzednim.

LITERATURA

[1] Polska Norma PN-ISO 5725 Dokładność (poprawność i precyzja) metod pomiarowych i wyników pomiarów. Polski Komitet Normalizacyjny PKN Warszawa (2002)

[2] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM), revised and corrected version of GUM 1995, BIPM_JCGM 100: (2008). tłumaczenie polskie: Alfavero Warszawa (1999, 2002)

[3] Warsza Z. L., Zięba A., Niepewność typu A pomiaru o obserwacjach samoskorelowanych. *PAK* (2012), n. 2, 157 -161

[4] Petrov B.N., Viktorov B. A. i inni,: Princip invariantnosti v izmieritelnoj texnikie. "Nauka" Moskwa (1976)

[5] Petrov B. N., Izbrannyje trudy (Wybrane prace), tom 1, Teoria avtomaticheskovo upravlenija. Moskva «Наука», (1983)

[6] Володарский Е.Т. Структурно - Алггоритмическое методы повышения достоверности контроля. *Сборник докладов XV Симпозиума «Метрология и метрологическое обеспечение (2005)»* г. Содополь, Болгария, с. 48 – 52

[7]. Володарский Е.Т., Кухарчук В.В. at all, *Метрологическое обеспечение измерений и контроля.* Винница: 2001. с. 219

***Autorzy:** prof. dr nauk techn. inż. Evgeniy T. VOLODARSKY, Uniwersytet Narodowy Ukrainy "Politechnika Kijowska", email: vet-1@ukr.net;*

doc.(em.) dr inż Zygmunt L. WARSZA, Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, 02 486 Warszawa Al. Jerozolimskie 202, email: zlw@op.pl;

prof. dr nauk techn. inż. Larisa Kosheva, Narodowy Uniwersytet Lotnictwa, Kijów Ukraina, email: l.kosh@ukr.net