Krzysztof OPRZĘDKIEWICZ

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej

doi:10.15199/48.2015.07.36

Sterowalność względem wyjścia dla systemu liniowego stacjonarnego o niepewnych parametrach

Streszczenie. *W pracy omówiono problem sterowalności względem wyjścia dla systemu liniowego, stacjonarnego, opisanego transmitancją operatorową z niepewnością parametryczną współczynników licznika i mianownika tej transmitancji. Sformułowano proste warunki sterowalności względem wyjścia dla rozważanej klasy systemów dynamicznych, bazujące na geometrycznej interpretacji zer i biegunów transmitancji. Wyniki zilustrowano przykładami obliczeniowymi*

Abstract. *In the paper a controllability problem for a linear, time-invariant dynamic system with parametric uncertainty of transfer function elements is considered. Simple controllability conditions, based onto geometrical interpretation of roots and zeros of transfer function were formulated. Results were by a numerical examples depicted.* ***(An output controllability problem for a linear, time-invariant uncertain-parameter system)***

Słowa kluczowe: systemy o niepewnych parametrach, sterowalność względem wyjścia.
Keywords: uncertain-parameter systems, an output controllability.

Uwagi wstępne

W wielu sytuacjach praktycznych podczas budowy modelu obiektu regulacji w postaci równania stanu mamy do czynienia z niepewną informacją o wartości parametrów modelowanego obiektu, przy jednoczesnej znajomości ogólnej struktury modelu oraz pełnej informacji o jego wyjściu. Uzasadnić to można tak, że podczas konstrukcji układu sterowania struktura wewnętrzna obiektu i sposób oddziaływania na niego sygnału sterującego, opisane przez macierze stanu i sterowań nie zawsze są znane z odpowiednią dokładnością.

W takiej sytuacji dobre odwzorowanie rzeczywistości zapewnia opis parametrów obiektu z użyciem liczb przedziałowych. Jednocześnie jednak niepewność obiektu implikuje dodatkowe problemy podczas syntezy układu sterowania. Jednym z nich jest niejednoznaczność podstawowych własności systemu, takich jak stabilność, sterowalność lub obserwowalność w obrębie obszaru niepewnych parametrów. Niektóre wektory niepewnych parametrów zapewniają utrzymanie określonej własności, a inne tego nie zapewniają. Ten fakt powinien być zawsze uwzględniany podczas analizy systemu o niepewnych parametrach.

Zagadnienia sterowalności systemów o niepewnych parametrach były przedmiotem rozważań wielu Autorów. Przykładowo – odporna sterowalność liniowego, stacjonarnego systemu przedziałowego o wielu wejściach i wyjściach z przedziałową macierzą stanu i przedziałową macierzą sterowań była rozważana w pracy [1], przykłady algebraicznych kryteriów sterowalności dla systemu przedziałowego są omówione w pracy [15]. Zagadnienia stabilności dla systemów hybrydowych z przedziałowymi macierzami stanu i sterowań były omawiane w pracy [15], a zagadnienia różnych typów sterowalności (aproksymatywna sterowalność, globalna sterowalność) dla przełączalnych systemów biliniowych były omawiane w pracy [4].

W niniejszej pracy omówiono zagadnienia sterowalności względem wyjścia dla systemu liniowego stacjonarnego z jednym wejściem i jednym wyjściem (ang. SISO), opisanym transmitancją operatorową, przy czym zera i bieguny tej transmitancji są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów systemu, opisanych przez liczby przedziałowe. Wymiar przestrzeni niepewnych parametrów systemu przyjęto równy dwa, co implikuje prostą interpretację geometryczną niepewnych zer i biegunów transmitancji.

Analiza sterowalności rozważanego systemu bazuje na tej interpretacji geometrycznej i będzie przeprowadzona analogicznie, jak we wcześniejszych pracach autora (zob. [13], [14]).

W pracy zostaną omówione następujące zagadnienia:

- System liniowy stacjonarny o niepewnych parametrach opisany transmitancją operatorową,
- interpretacja geometryczna zer i biegunów transmitancji,
- sterowalność rozważanego systemu względem wyjścia,
- Obszary niesterowalności względem wyjścia
- przykład obliczeniowy,
- uwagi końcowe.

System liniowy stacjonarny o niepewnych parametrach opisany transmitancją operatorową

Rozważmy system dynamiczny liniowy stacjonarny o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO), opisany następującą transmitancją operatorową:

$$G(s,q)=\frac{N(s,q)}{D(s,q)} \tag{1}$$

W (1) *N(s,q)* oznacza licznik transmitancji, a *D(s,q)* oznacza jej mianownik. Są one funkcjami zmiennej zespolonej *s* oraz niepewnych parametrów obiektu i mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$N(s,q)=\prod_{m=1}^{M}\left(s-z_m(q)\right) \tag{2}$$

gdzie $z_m(q)$ oznacza *m*-te zero transmitancji

$$D(s,q)=\prod_{n=1}^{N}\left(s-\lambda_n(q)\right) \tag{3}$$

gdzie $\lambda_n(q)$ oznacza *n*-ty biegun transmitancji.

W (2) - (3) q oznacza wektor niepewnych parametrów obiektu: $q=[q_1, q_2]^T \in Q$.
Stopień licznika i mianownika transmitancji spełniają warunek o fizycznej realizowalności : $M \le N$.

Niepewne parametry obiektu mogą być interpretowane jako liczby przedziałowe:

$$q_1=\left[\underline{q_1},\overline{q_1}\right],\quad q_2=\left[\underline{q_2},\overline{q_2}\right] \tag{4}$$

Cały obszar niepewnych parametrów *Q* można zatem zdefiniować następująco:

$$Q=\left\{q\in R^2:\underline{q_1}\le q_1\le\overline{q_1},\underline{q_2}\le q_2\le\overline{q_2}\right\} \tag{5}$$

Zbiór wierzchołków obszaru niepewnych parametrów Q jest zdefiniowany następująco:

$$q_w = \{[\underline{q_1},\underline{q_2}],[\underline{q_1},\overline{q_2}],[\overline{q_1},\underline{q_2}],[\overline{q_1},\overline{q_2}]\} \tag{6}$$

Zera i bieguny transmitancji mogą być również przedstawione jako liczby przedziałowe:

$$Z_m(q) = [\underline{z_m(q)}; \overline{z_m(q)}] \tag{7}$$

$$\Lambda_n(q) = [\underline{\lambda_n(q)}; \overline{\lambda_n(q)}]$$

Przy czym skrajne wartości przedziałów są określone następująco:

$$\begin{aligned} \underline{z_m(q)} &= \min_Q z_m(q) \\ \overline{z_m(q)} &= \max_Q z_m(q) \\ \underline{\lambda_n(q)} &= \min_Q \lambda_n(q) \\ \overline{\lambda_n(q)} &= \max_Q \lambda_n(q) \end{aligned} \tag{8}$$

Zbiór wszystkich zer transmitancji określonych przez (1) lub (7) będzie oznaczony jako $Z(q)$. Jest on zdefiniowany następująco:

$$\begin{aligned} &Z(q) = \\ &= \{z_j(q) \in C : N(z_m, q) = 0,\ m = 1,...,M,\ q \in Q\} = \\ &= \bigcup_{m=1}^{M} Z_m(q) \end{aligned} \tag{9}$$

W analogiczny sposób można zdefiniować zbiór $\Lambda(q)$ wszystkich biegunów transmitancji (1), który jednocześnie jest widmem systemu:

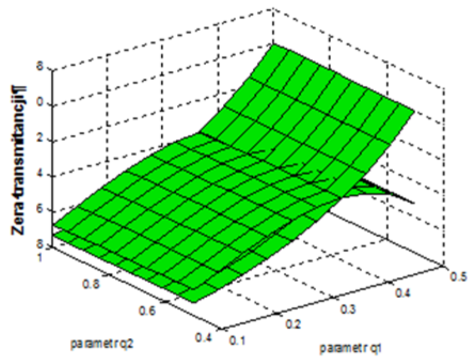
$$\begin{aligned} &\Lambda(q) = \\ &= \{\lambda_n(q) \in C : D(\lambda_n, q) = 0,\ n = 1,...,N,\ q \in Q\} = \\ &\bigcup_{n=1}^{N} \Lambda_n(q) \end{aligned} \tag{10}$$

Zauważmy, że system o niepewnych parametrach (1) – (10) może być interpretowany jako zbiór nieskończenie wielu systemów o znanych parametrach, z których każdy jest opisany przez jeden, konkretny wektor q.

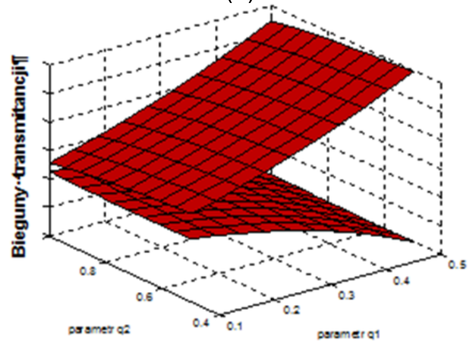
Interpretacja geometryczna zer i biegunów transmitancji

W rozważanym wypadku wymiar przestrzeni niepewnych parametrów Q jest równy dwa, co powoduje, że analiza podstawowych własności rozważanego systemu o niepewnych parametrach może być prowadzona w oparciu o geometryczną interpretację obszaru niepewnych parametrów oraz zbioru zer i biegunów transmitancji. Omówione poniżej podejście będzie analogiczne, jak prezentowane w pracach [12], [13] i [14] dotyczących systemu opisywanego równaniem stanu.

Interpretacja geometryczna zbiorów $Z(q)$ oraz $\Lambda(q)$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ jest taka, że każdy element $Z_m(q)$ lub $\Lambda_n(q)$ może być interpretowany jako powierzchnia w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$, a cały zbiór może być interpretowany jako zbiór tych powierzchni (zob. [12], [13], [14]). Zbiory (9) i (10) mogą być wyznaczone z wykorzystaniem metod obliczeniowych, a w szczególnych przypadkach także z użyciem metod analitycznych. Przykładowa interpretacja geometryczna zer i biegunów pokazana jest na rys.1.



(a)



(b)

Rys.1. Przykładowa interpretacja geometryczna zer (a) oraz biegunów (b) transmitancji o niepewnych parametrach.

W przypadku rozważanego systemu lokalizacja przestrzenna zer i biegunów determinuje wiele podstawowych własności systemu, podobnie, jak miało to miejsce w przypadku systemu z niepewnością stanu (zob. [12], [13], [14], [15]) W niniejszej pracy zostanie omówiony problem sterowalności względem wyjścia dla rozważanego systemu o niepewnych parametrach.

Sterowalność rozważanego systemu względem wyjścia

Własność sterowalności będzie analizowana z wykorzystaniem podejścia geometrycznego prezentowanego we wcześniejszych pracach autora: [12], [13], [14], [15] z uwzględnieniem specyfiki niniejszego problemu.

Na początku można przypomnieć, że w przypadku systemu o znanych parametrach własność sterowalności jest w pełni jednoznaczna – system jest sterowalny lub nie, w zależności od wartości jego parametrów. Natomiast w przypadku rozważanego systemu o niepewnych parametrach zdefiniowanych przez wektor przedziałowy q należy się spodziewać sytuacji, gdy dla pewnych wartości tego wektora system będzie sterowalny, a dla innych nie będzie. Z tego względu dla uporządkowania i uproszczenia opisu rozważanego systemu o niepewnych parametrach można wprowadzić pojęcie „obszaru sterowalności względem wyjścia" i „obszaru niesterowalności względem wyjścia", analogicznie, jak dla systemu z niepewnością stanu (zob. [13]). Podobne podejście zaprezentowano m. in. w pracy [2]: jest to idea tzw. „cząstkowej sterowalności" w przestrzeni Hilberta lub Banacha.

Definicja 1 *(obszar sterowalności względem wyjścia)*
Obszarem sterowalności względem wyjścia nazywamy taki podzbiór Q_{cy} zbioru niepewnych parametrów obiektu Q, dla którego system jest sterowalny względem wyjścia.

Definicja 2 *(obszar niesterowalności względem wyjścia)*
Obszarem niesterowalności względem wyjścia nazywamy taki podzbiór Q_{ncy} zbioru niepewnych parametrów obiektu Q, dla którego system jest niesterowalny względem wyjścia.

Istotą analizy sterowalności dla rozważanego systemu o niepewnych parametrach będzie sformułowanie kryteriów wyznaczania obszarów sterowalności i niesterowalności w obrębie zadanego zbioru niepewnych parametrów *Q*.

Punktem wyjścia do sformułowania kryteriów sterowalności dla rozważanego systemu jest warunek sterowalności względem wyjścia dla systemu liniowego opisanego transmitancją o znanych parametrach, podany w wielu pracach, np. [3].

Twierdzenie 1. *(warunek konieczny i dostateczny sterowalności względem wyjścia systemu liniowego stacjonarnego opisanego transmitancją operatorową)*

Rozważmy system liniowy stacjonarny o znanych parametrach, opisany następującą transmitancją operatorową:

$$G(s)=\frac{(s-z_1)..(s-z_m)}{(s-\lambda_1)..(s-\lambda_n)}$$

gdzie z oznacza zero transmitancji a λ oznacza biegun transmitancji.

System opisany przez powyższą transmitancję jest sterowalny względem wyjścia wtedy i tylko wtedy, gdy nie następuje skrócenie się żadnego zera z żadnym biegunem transmitancji.

Skrócenie się zera z biegunem transmitancji opisane w Twierdzeniu 1 następuje wtedy i tylko wtedy, gdy w systemie co najmniej jedno zero i jeden biegun są sobie równe.

W przypadku rozważanego systemu o niepewnych parametrach zera i bieguny transmitancji są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów i może wystąpić sytuacja, gdy w obrębie zbioru niepewnych parametrów *Q* wystąpią takie wartości wektora *q*, dla których co najmniej jedno zero i jeden biegun transmitancji (1) będą sobie równe oraz mogą wystąpić sytuacje, gdy zera i bieguny będą różne.

Równość zera i bieguna jest interpretowana geometrycznie jako istnienie części wspólnej dwóch powierzchni $\boldsymbol{R}^3$, z których jedna reprezentuje biegun, a druga zero.

Powyższe uwagi będą punktem wyjścia do sformułowania warunków sterowalności względem wyjścia rozważanego systemu dynamicznego.

Obszary sterowalności względem wyjścia systemu

Jak już zauważono wcześniej, w obrębie przestrzeni niepewnych parametrów *Q* mogą istnieć takie wektory *q*, dla których powierzchnie w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ reprezentujące zera i bieguny transmitancji rozważanego systemu będą mieć część wspólną. W takiej sytuacji następuje redukcja bieguna i zera oraz utrata sterowalności.

Wektor $q \in Q$, dla którego następuje przecięcie się *n*-tego bieguna oraz *m*-tego zera transmitancji oznaczymy przez q_{nmy} Może on być opisany następująco:

(11) $$q_{nmy}=\{q\in Q:\lambda_n(q)=z_m(q),\ n=1,...N,\ m=1,...M\}$$

Zbiór wszystkich wektorów q_{nmy} dla których następuje skrócenie się bieguna z zerem transmitancji (1) jest obszarem niesterowalności względem wyjścia Q_{ncy} opisanym przez definicję 2. Może on być zapisany następująco:

(12) $$Q_{ncy}=\{q\in Q:\lambda_n(q)\cap z_m(q)\neq 0,\ n=1...N,\ m=1...M\}$$

Zbiór Q_{ncy} opisany przez (12) jest zbiorem wszystkich wektorów (11), co można zapisać następująco:

(13) $$Q_{ncy}=\bigcup q_{nmy}$$

W przypadku, gdy Q_{ncy} nie jest zbiorem pustym, może on być wyznaczony z wykorzystaniem relacji (11), (12) i (13).

Można też zauważyć, że w sytuacji, gdy żaden biegun transmitancji nie ma części wspólnej z żadnym zerem w obrębie całej przestrzeni niepewnych parametrów *Q*, to żaden wektor $q \in Q$ nie będzie generował zbioru Q_{ncy} i podobszar niesterowalności względem wyjścia dla rozważanego systemu będzie zbiorem pustym.

Najbardziej ogólny warunek istnienia lub nieistnienia zbioru Q_{ncy} może być sformułowany bezpośrednio na podstawie powyższych spostrzeżeń. Ma on postać uwagi 1.

Uwaga 1 *(Warunek konieczny i dostateczny* <u>*istnienia*</u> *podobszaru niesterowalności względem wyjścia Q_{ncy} w obrębie obszaru niepewnych parametrów Q)*

- *Rozważmy system dynamiczny o niepewnych parametrach opisany transmitancją (1),*
- *Zbiór zer transmitancji (1) jest zdefiniowany przez (9), a zbiór biegunów transmitancji (1) jest zdefiniowany przez (10),*
- *Zera (9) oraz bieguny (10) transmitancji są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów systemu opisanych przez zbiór Q.*
- *Zera i bieguny są interpretowane jako powierzchnie w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$.*

Dla powyższego systemu następujące sformułowania są równoważne:

- *Co najmniej jedno zero i jeden biegun transmitancji obiektu mają część wspólną w obszarze niepewnych parametrów Q,*
- *Równanie (11) posiada rozwiązanie w obrębie obszaru niepewnych parametrów systemu Q,*
- *Zbiór Q_{ncy} opisany przez (12) nie jest zbiorem pustym,*
- *Dla co najmniej jednego wektora $q \in Q$ następuje redukcja bieguna i zera transmitancji (1)*

Uwaga 1 pozwala w jednoznaczny sposób sprawdzić sterowalność względem wyjścia dla rozważanego systemu opisanego transmitancją. Jej praktyczne zastosowanie wymaga jednak najczęściej wykonania dużej ilości obliczeń numerycznych w celu wyznaczenia zbiorów (9) i (10) w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ lub też poszukiwania rozwiązań równania (11) w obrębie obszaru Q. Rozwiązania takie mogą być znalezione numerycznie, w lub w pewnych szczególnych przypadkach także analitycznie.

W analogiczny sposób można sformułować warunek konieczny i dostateczny nieistnienia podobszaru niesterowalności względem wyjścia w rozważanym obszarze niepewnych parametrów *Q*. Ma on postać Uwagi 2.

Uwaga 2 *(Warunek konieczny i dostateczny* <u>*nieistnienia*</u> *podobszaru niesterowalności względem wyjścia Q_{ncy} w obrębie obszaru niepewnych parametrów Q)*

- *Rozważmy system dynamiczny o niepewnych parametrach opisany transmitancją (1),*
- *Zbiór zer transmitancji (1) jest zdefiniowany przez (9), a zbiór biegunów transmitancji (1) jest zdefiniowany przez (10),*
- *Zera (9) oraz bieguny (10) transmitancji są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów systemu opisanych przez zbiór Q.*
- *Zera i bieguny są interpretowane jako powierzchnie w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$.*

Dla powyższego systemu następujące sformułowania są równoważne:

- *Żadne zero transmitancji (1) opisane przez (9) nie ma części wspólnej z żadnym biegunem opisanym przez (10),*
- *Równanie (11) nie posiada rozwiązań w obrębie obszaru niepewnych parametrów systemu Q,*
- *Zbiór Q_{ncy} opisany przez (12) jest zbiorem pustym,*
- *Dla żadnego wektora $q \in Q$ nie następuje redukcja bieguna i zera transmitancji (1)*

W przypadku ogólnym warunek podany w Uwadze 2 może być sprawdzony numerycznie, a w pewnych szczególnych wypadkach również analitycznie.
Warunki sformułowane w Uwagach 1 i 2 wymagają wykonania dość dużej liczby obliczeń.

Jednakże korzystając z geometrycznej interpretacji zer i biegunów w przestrzeni $\boldsymbol{R^3}$ oraz ich zapisu w postaci (9) i (10) można także podać warunek dostateczny sterowalności w całym obszarze niepewnych parametrów *Q*, który generalnie jest prostszy w zastosowaniu. Ma on postać uwagi 3.

Uwaga 3 *(Warunek dostateczny nieistnienia podobszaru niesterowalności względem wyjścia Q_{ncy} w obrębie obszaru niepewnych parametrów Q)*

- *Rozważmy system dynamiczny o niepewnych parametrach opisany transmitancją (1),*
- *Zbiory zer i biegunów transmitancji (1) są zbiorami liczb przedziałowych opisanymi przez (9) i (10), które mogą być interpretowane jako zbiory powierzchni w przestrzeni $\boldsymbol{R^3}$.*
- *Część wspólna zbiorów $Z(q)$ i $\Lambda(q)$ określonych przez (9) i (10) jest zbiorem pustym: $Z(q) \cap \Lambda(q) = \varnothing$.*

Dla powyższego systemu następujące sformułowania są równoważne:

- *Żadne zero transmitancji (1) opisane przez (9) nie ma części wspólnej z żadnym biegunem opisanym przez (10),*
- *Równanie (11) nie posiada rozwiązań w obrębie obszaru niepewnych parametrów systemu Q,*
- *Zbiór Q_{ncy} opisany przez (12) jest zbiorem pustym,*
- *Dla żadnego wektora $q \in Q$ nie następuje redukcja bieguna i zera transmitancji (1)*

W przypadku uwagi 3 należy zauważyć, że implikacja w przeciwną stronę nie jest prawdziwa, gdyż można wskazać sytuacje, gdy część wspólna zbiorów liczb przedziałowych *Z(q)* i *Λ(q)* nie jest zbiorem pustym, a pomimo to redukcja zera i bieguna transmitancji nie zachodzi. Zostanie to pokazane w przykładzie 1.

Przykład 1

Jako pierwszy przykład rozważmy system drugiego rzędu, opisany transmitancją drugiego rzędu z dwoma zerami, zapisaną w postaci (2) (3), przy czym zera i bieguny są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów:

$$z_1(q) = q_1^5 + 7q_2^3 - q_1 + q_2 + 2 \qquad (14)$$
$$z_2(q) = 6q_1^5 - 5q_2^3 + 2$$

$$\lambda_1(q) = -20q_1^3 + 15q_1^2 + 2q_1 - 3q_2^5 + q_2^2 - 7 \qquad (15)$$
$$\lambda_2(q) = -20q_1^3 + 15q_1^2 + 2q_1 - 3q_2^5 + q_2^2 + q_2 - 5$$

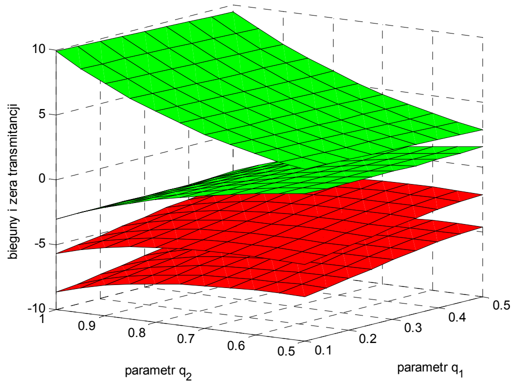
Obszar niepewnych parametrów rozważanego systemu jest zdefiniowany zgodnie z (2) i (3), przy czym liczbowe wartości niepewnych parametrów są równe:

$$q_1 = [0.1; 0.5], \quad q_2 = [0.5; 1.0] \qquad (16)$$

Cały obszar niepewnych parametrów *Q* można zatem zdefiniować następująco:

$$Q = \{q \in R^2 : \underline{0.1} \le q_1 \le 0.5, \quad 0.5 \le q_2 \le 1.0\} \qquad (17)$$

Interpretacja geometryczna przedziałowych zer i biegunów rozważanej transmitancji pokazana jest na rysunku 2



Rys.2. Przedziałowe zera (zielony) i bieguny (czerwony) transmitancji z przykładu 1.

Zakresy wartości zer i biegunów dla rozważanego przykładu, zgodnie z (7), (8), (9) i (10) są równe:

$$Z(q) = \{[\,2.9063; 9.9000], [\,-2.9999; 1.5625]\} \qquad (18)$$
$$\Lambda(q) = \{[\,-8.6700; -4.5938], [\,-5.6700; -2.0233]\}$$

Na podstawie (18) można stwierdzić, że warunek dostateczny nie istnienia obszarów niesterowalności, opisany w uwadze 3 nie jest spełniony, gdyż przedział wartości zera $Z_2(q)$ ma część z przedziałem bieguna $\Lambda_2(q)$.

Jednakże na podstawie analizy wzajemnego ułożenia zer i biegunów rozważanego obiektu, pokazanego na rysunku 2 można zauważyć, że w przypadku rozważanego obiektu w obrębie obszaru niepewnych parametrów *Q* żadna z powierzchni reprezentujących zera transmitancji: $Z_1(q)$ ani $Z_2(q)$ nie przecina się z żadną z powierzchni reprezentujących bieguny transmitancji: $\Lambda_1(q)$ ani $\Lambda_1(q)$. Na podstawie tego faktu można wnioskować, że w rozważanym przykładzie nie nastąpi redukcja żadnego bieguna i żadnego zera transmitancji, czyli rozważany obiekt jest sterowany w całym rozważanym obszarze niepewnych parametrów.

Przykład 2

W następnym przykładzie rozważany obiekt opisany transmitancją drugiego rzędu z jednym zerem zapisaną w postaci (2) (3), przy czym zero jest nieliniową funkcją niepewnych parametrów, a oba bieguny są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów:

$$z_1(q) = -3q_1^5 - 2q_2^3 - 0.8 \qquad (19)$$

$$\lambda_1(q) = -3q_1 - 5q_2 - 1 \qquad (20)$$
$$\lambda_2(q) = -q_1 - 3q_2$$

Obszar niepewnych parametrów rozważanego systemu jest zdefiniowany zgodnie z (2) i (3), przy czym liczbowe wartości niepewnych parametrów są równe:

$$q_1 = [0.1; 1.0], \quad q_2 = [0.1; 0.5] \qquad (21)$$

Cały obszar niepewnych parametrów *Q* można w rozważanym wypadku zdefiniować następująco:

$$Q = \{q \in R^2 : \underline{0.1} \le q_1 \le 1.0, \quad 0.1 \le q_2 \le 0.5\} \qquad (22)$$

Interpretacja geometryczna przedziałowego zera i przedziałowych biegunów rozważanej transmitancji pokazana jest na rysunku 3.

Na podstawie rysunku 3 można stwierdzić, że w rozważanym wypadku wystąpi kompensacja bieguna i zera w rozważanym obszarze niepewnych parametrów opisanym przez (21) i (22). Istotnie, można sprawdzić, że równanie:

(23) $$z_1(q) = \lambda_2(q)$$

ma rozwiązanie w obrębie obszaru Q opisanego przez (22). Po uwzględnieniu (19) i (20) równanie (23) przyjmie postać:

(24) $$q_1(1-3q_1^4) + q_2(3-2q_2^2) + 0.2 = 0$$

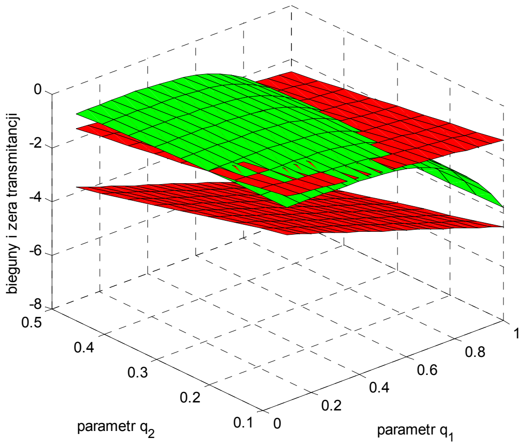
Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że w rozważanym wypadku podobszar niesterowalności Q_{ncy} nie jest zbiorem pustym i ma on postać:

(25) $$Q_{ncy} = \{q_{21y}\}$$

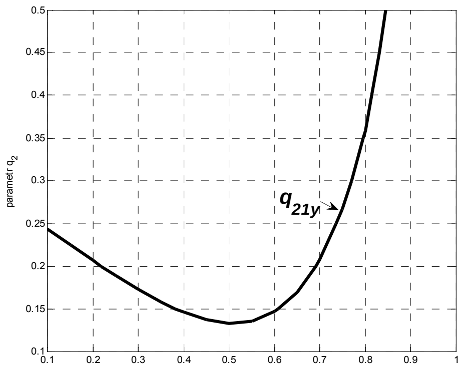
przy czym zbiór q_{21y} jest określony następująco:

(26) $$q_{21y} = \{q \in Q : q_1(1-3q_1^4) + q_2(3-2q_2^2) + 0.2 = 0\}$$

Interpretacja geometryczna zbioru (26) pokazana jest na rysunku 4.



Rys.3. Przedziałowe zero (zielony) i bieguny (czerwony) transmitancji z przykładu 2.



Rys.4. Podobszar niesterowalności q_{21y} z przykładu 2 na płaszczyźnie niepewnych parametrów obiektu Q.

Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- Analiza sterowalności dla rozważanego systemu z nieliniową zależnością zer i biegunów transmitancji od niepewnych parametrów systemu została przeprowadzona analogicznie, jak dla systemu liniowego z dwuwymiarową przestrzenią niepewnych parametrów, opisanego w przestrzeni stanu.
- Interpretacja geometryczna zer i biegunów transmitancji operatorowej systemu pozwala na sformułowanie prostych warunków redukcji biegunów przez zera transmitancji, co pozwala na sformułowanie wniosków dotyczących utraty sterowalności przez rozważany system.
- Sformułowane w niniejszej pracy warunki istnienia lub nieistnienia obszarów niesterowalności względem wyjścia w obrębie obszaru niepewnych parametrów są w rozważanym przypadku bardziej ogólne, niż sformułowane we wcześniejszych pracach autora warunki dla systemów z liniową zależnością parametrów równania stanu od niepewnych parametrów obiektu.

LITERATURA

[1] Bangwen-Cheng, Jing-Zhang (2004) „Robust controllability for a class of uncertain linear time-invariant MIMO systems”. *IEEE-Transactions-on-Automatic-Control.* Nov. 2004; 49(11): 2022-7

[2] Bashirov A. E. , Mahmudov N., Semi N. , Eitkan H. (2007) „Partial controllability concepts”. *Int. J. of Control*, vol. 80, No 1, January 2007, s. 1-7,

[3] Byrski W. (2007) “Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych”. Wyd. AGH 2007.

[4] Cheng D. (2005) „Controllability of Switched Bilinear Systems”. *IEEE Trans. Aut Control,* vol. 50, No 4, April 2005, s. 511-515.

[5] Chen-YQ; Hyo-Sung-Ahn; Dingyu-Xue (2006) “Robust controllability of interval fractional order linear time invariant systems”. *Signal-Processing*. Oct. 2006; 86(10): pp. 2794-802

[6] El-Jai A. Simon M. C. Zerrik E., Pritchard A.J. (1995) “Regional controllability of distributed parameter systems”. *Int. J. of Control.* Dec. 1995; 62(6): 1351-65

[7] H a s h i m o t o T. (2011) Controllability and Observability of Linear Time-Invariant Uncertain Systems Irrespective of Bounds of Uncertain Parameters IEEE Trans Aut. Control vol. 56 no 8 2011 pp. 1807-1817

[8] Kalman R. E. (1960) „On the general theory of control systems”. *IFAC Moscow*, vol. 1, London, Butterworth, 1961, s. 481 – 492.

[9] Klamka J. (1990) „Sterowalność systemów dynamicznych”. PWN 1990,

[10] Mitkowski W. (1991) „Stabilizacja systemów dynamicznych” WNT 1991,

[11] Mitkowski W., Oprzędkiewicz K. (2005) “Problemy sterowania pewnej klasy systemów liniowych o niepewnych parametrach”. *Automatyka,* Tom 9, Zeszyt 1-2, 2005, s. 139 – 153,

[12] Oprzędkiewicz K. (2003) “The interval parabolic system”. *Archives of Control Sciences*, Vol. 13 (XLIX), No 4 s 415-430, 2003,

[13] Oprzędkiewicz K. (2004) „A controllability problem for a class of uncertain parameters linear dynamic systems”. *Archives of Control Sciences*, Vol. 14, No 1 s 85-100, 2004,

[14] Oprzędkiewicz K. (2008) “Praktyczne sterowanie systemami dynamicznymi z widmem punktowym I parametrami przedziałowymi” Wydawnictwa AGH, 2008,

[15] Oprzędkiewicz K. (2011) *Sterowalność systemu liniowego stacjonarnego z niepewnością stanu i sterowania Przegląd Elektrotechniczny* 2011 R. 87 nr 3, s. 286–292.

[16] Shashikhin V. N. (2002) “Controllability and observability criteria of interval systems while robust control synthesis”. *Problemy-Upravleniya-i-Informatik*i, nr 34(9): s. 53-65,

[17] Soh C. B. (2000) ”*Controllability and observability of periodic hybrid interval systems”* .Int. J. Syst. Sci. Dec. 2000; 31(12): s. 1563-71,

[18] Xie G, Wang L. (2003) *”Controllability and Stabilizability of switched linear systems”.* Syst. Control Lett. , vol. 42, No 2, s 135 – 155, 2003,

***Autor**: dr hab. inż. Krzysztof Oprzędkiewicz, AGH Akademia Górniczo – Hutnicza, Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, E-mail: kop@agh.edu.pl;*