

Efektywny algorytm obrazowania w tomografii ultradźwiękowej i radiowej dla zagadnień dwuwymiarowych

Streszczenie. W artykule przedstawiono nową efektywną metodę obrazowania, która może być zastosowana w tomografii ultradźwiękowej i radiowej. Proponowana metoda poprzez zmianę kształtu piksela prowadzi do znacznego uproszczenia algorytmu, kosztem niewielkich przybliżeń. Jak udowodniono w pracy, przybliżenia te nie mają istotnego znaczenia co do czytelności obrazu, kilkunastokrotnie przyspieszając jego uzyskanie.

Abstract. This article presents a new effective imaging method that can be applied in ultrasonic and radio tomography. The proposed method by changing the shape of the pixels leads to a substantial simplification of the algorithm at the cost of small approximations. As proved in the work, these approximations do not have a significant impact on the readability of the image which is several times faster (**Effective ultrasound and radio tomography imaging algorithm for two-dimensional problems**).

Słowa kluczowe: Transmisyjna Tomografia Dyfuzyjna, Tomografia Radiowa, Algebraiczne Techniki Rekonstrukcyjne, rozkład względem wartości osobliwych.

Keywords: Ultrasound Transmission Tomography, Radio-Frequency Tomography, Algebraic Reconstruction Techniques, Singular Values Decomposition.

Wstęp

W ostatnich latach obserwujemy dynamiczny rozwój Tomografii niekonwencjonalnej jak na przykład dyfuzyjnej tomografii optycznej [12,13,16].

Przez tomografię konwencjonalną, autorzy rozumieją tomografię o ustalonym zasięgu zastosowań w medycynie czy też przemyśle, jak na przykład tomografię rentgenowską, tomografię rezonansu magnetycznego czy tomografię ultradźwiękową nazywaną powszechnie USG. Ta ostatnia coraz śmielej stosowana jest w przemyśle [4,10]. Również tomografia fal z radiowego zakresu jest ostatnio coraz chętniej stosowana [2,3,9,17].

Transmisyjną tomografię ultradźwiękową i radiową tomografię łączy jedna wspólna cecha. Fale ultradźwiękowe i radiowe, rozchodzą się po liniach prostych. Wykorzystując tę cechę, zaproponowano efektywną modyfikację istotnego fragmentu dobrze znanego w literaturze algorytmu algebraicznej rekonstrukcji obrazu (ang. *Algebraic Reconstruction Techniques (ART)*), zaproponowanego po raz pierwszy przez S. Kaczmarza [5,6,7,15]. Istota tej modyfikacji polega na przybliżeniu kształtu piksela, (który do tej pory traktowany był jako kwadratowa komórka), do kształtu kołowego. Zmiana ta pozwala w sposób istotny przyspieszyć metodę wyznaczania pikseli, przez które przechodzi dany promień w rozpatrywanym obszarze. Dzięki temu w zagadnieniach 2D uzyskujemy znaczne przyspieszenie obrazowania, co ma szczególne znaczenie w przypadkach, kiedy zależy nam na obrazowaniu „on line”. Zysk czasowy będzie jeszcze większy dla zagadnień 3D, ale będzie to przedmiotem osobnego artykułu.

Metody algebraiczne obrazowania tomograficznego

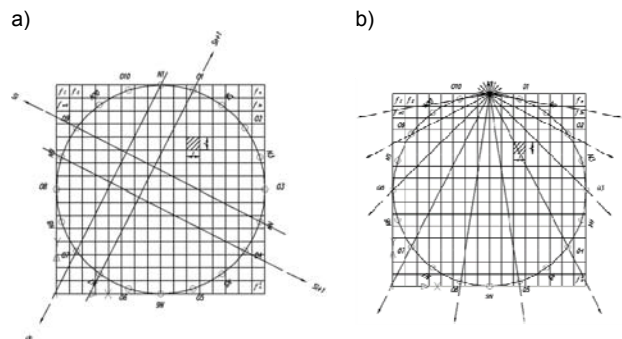
Większość algorytmów z grupy algebraicznych technik rekonstrukcyjnych – ART bazuje na metodologii aproksymacji funkcji przez szeregi o skończonej długości [6,15].

W metodach tych dokonuje się uproszczenia polegającego na przyjęciu, że rekonstruowany obraz składa się ze skończonej liczby elementów. Obraz odtwarzany jest za pomocą algorytmu dyskretyzującego badany obszar do postaci n kwadratowych komórek o wymiarach $l \times l$, (rysunek 1), których geometryczny środek odpowiada jednemu pikselowi w tworzonej obrazie.

Oznacza to, że aby zrekonstruować obraz, należy nałożyć taką samą siatkę kwadratową na badany obiekt

$f(x, y)$ i tworzony obraz. Algorytmy algebraiczne w porównaniu do transformatowych mają istotną zaletę polegającą na tym, że do projekcji można w nich stosować nie tylko rzutowanie równoległe, ale również rzutowanie środkowe z rozbieżnymi wiązkami promieni. Przykładową siatkę przedstawia rysunek 1.

Podstawy algebraicznej techniki rekonstrukcyjnej zostały opisane przez S. Kaczmarza [6], na długo przed powstaniem tomografii komputerowej i w swojej wersji oryginalnej nie dotyczyły problemu rekonstrukcji obrazu z projekcji.



Rys. 1. Siatka kwadratowa nakładana na badany obiekt – podstawa wszystkich arytmetycznych metod rekonstrukcji obrazu; a) promienie w geometrii równoległej, b) pęk rozbieżnych promieni; N – nadajnik, O – odbiornik

Przyjmuje się, że każda komórka jest opisana stałą funkcja $f(x, y)$ i w przypadku na przykład transmisyjnej tomografii ultradźwiękowej określa poszukiwaną prędkość fali ultradźwiękowej w danej komórce. Oznaczmy f_j jako stałą wartość j -tej komórki, a n jako całkowitą liczbę pikseli (kwadratowych komórek siatki).

Dla arytmetycznych technik rekonstrukcji obrazu promień s definiowany może być dwojako. Można przyjąć, że promień jest linią o szerokości równej np. długości boku piksela (kwadratu) l .

Oznacza to, że do rozważań używamy całej wiązki promieni równoległych (ang. *Ray – sum*), przechodzącej

przez rozpatrywany obszar. W większości przypadków szerokość wiązki jest równa długości boku piksela.

Na podstawie pomiarów czasów przejścia przebiegów impulsów ultradźwiękowych na stałej drodze między nadajnikami N a odbiornikami O , otrzymuje się scałkowane wartości prędkości na drogach i -tych wiązek ultradźwiękowych pomiędzy nadajnikami a odbiornikami, określane rzutami lub projekcjami s_i .

Związek pomiędzy wartościami f_j i projekcjami s_i wyraża zależność (1):

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j = s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie: m to całkowita liczba promieni (we wszystkich projekcjach), a w_{ij} to współczynnik wagowy określający udział szukanej wartości dla j -tej komórki w stosunku do całej zmierzonej wartości wzdłuż i -tego promienia wiązki.

Współczynnik wagowy może być równy stosunkowi zakreślonego w kwadracie siatki pola przez promień o danej szerokości do wartości pola całego kwadratu l^2 albo, jeżeli dla uproszczenia, przyjmiemy że promień ma szerokość zerową to wtedy współczynnik w_{ij} może być równy stosunkowi długości odcinka promienia zawartego w pikselu (kwadracie), do długości przekątnej kwadratu $\sqrt{2} l$.

Zależności te są różne od zera tylko dla kwadratów siatki, przez które przechodzi dany promień. W przypadku pikseli siatki, których dany promień nie przecina, współczynnik przyjmuje wartość równą zeru.

Jeżeli liczba promieni m i liczba kwadratów siatki n są niewielkie wówczas, do rozwiązania układu opisanego wzorem (2) można by było wykorzystać konwencjonalne metody teorii macierzy polegające na odwracaniu macierzy.

Przy dużych rozmiarach m i n nie jest możliwe stosowanie bezpośredniej inwersji macierzy. Aby rozwiązać duże układy równań stosuje się bardzo skuteczne iteracyjne metody numeryczne, oparte na zaproponowanej po raz pierwszy przez S. Kaczmarza [11,15] „metodzie projekcji”.

Aby wyjaśnić metodę uzyskiwania wyników, należy zapisać wzór (1) w formie układu równań (2):

$$(2) \quad \begin{aligned} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + \dots + w_{1n}f_n &= s_1, \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + \dots + w_{2n}f_n &= s_2, \\ \vdots & \\ w_{m1}f_1 + w_{m2}f_2 + \dots + w_{mn}f_n &= s_m. \end{aligned}$$

Odwzorowanie układu przy użyciu siatki kwadratowej złożonej z n pikseli daje obraz n stopni swobody. Dlatego obraz reprezentowany przez $[f_1, f_2, \dots, f_n]$ może być traktowany, jako pojedynczy punkt w n – wymiarowej przestrzeni. Wynika to z faktu, że w tej przestrzeni każde z równań (2) stanowi hiperpłaszczyznę.

Przez n – wymiarową przestrzeń kartezjańską C_n rozumiemy zbiór wszystkich uporządkowanych układów $[f_1, f_2, \dots, f_n]$ złożonych z n liczb rzeczywistych. Podzbiór C_k przestrzeni C_n nazywamy k – wymiarową hiperpłaszczyzną C_n . W szczególności hiperpłaszczyzny jednowymiarowe nazywają się liniami prostymi, a dwuwymiarowe – płaszczyznami.

Metoda SVD w rozwiązywaniu liniowych nadokreślonych układów równań

W obliczeniach praktycznych często pojawia się problem rozwiązania nadokreślonego układu równań liniowych (3), który w wyniku błędów pomiarowych może być również układem sprzecznym:

$$(3) \quad Wf = s,$$

gdzie: W – macierz $m \times n$ i $m > n$, $s = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ – wektor prawej strony równania, $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ – szukane rozwiązanie.

Jednym ze sposobów rozwiązania takiego problemu jest znalezienie wektora f^* , o możliwie małej normie euklidesowej, który dla zadanej macierzy W i wektora s minimalizuje normę euklidesową wektora residualnego $r = s - Wf$:

$$(4) \quad \|r\|_2 = \min \|s - Wf\|_2, \quad \|f^*\|_2 = \min \|f\|_2$$

Przy wyznaczaniu postaci analitycznej rozwiązania liniowego zadania najmniejszych kwadratów, korzystamy z twierdzenia o rozkładzie dowolnej macierzy prostokątnej na iloczyn macierzy ortogonalnej, diagonalnej i ortogonalnej [8,15].

Mówi ono, że dla dowolnej macierzy $W \in R_{m \times n}$ ($m \geq n$) istnieją macierze ortogonalne $U \in R_{m \times m}$, i $V \in R_{n \times n}$ takie, że:

$$(5) \quad W = UDV^T,$$

$$(6) \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R_{m \times n}$$

gdzie: $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{k-1} \geq d_k > d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = d_n = 0$, a k jest pseudo rzędem macierzy W .

Wielkości d_i nazywamy wartościami szczególnymi (osobliwymi) macierzy W , a rozkład (5) rozkładem według wartości szczególnych SVD (ang. *Singular Value Decomposition*).

Pierwiastki d_i są pierwiastkami wartości własnych macierzy $W^T W$, a kolumny macierzy V – odpowiadającymi im ortonormalnymi wektorami własnymi tej macierzy. Z kolei kolumny U są wektorami własnymi $W W^T$. Widzimy stąd, że wartości szczególne są określone jednoznacznie, natomiast macierze U i V nie.

Znając rozkład (5) można łatwo wyznaczyć rozwiązanie metodą liniowego zadania najmniejszych kwadratów (LZNK) (7):

$$(7) \quad f^* = W^+ s = VD^+ U^T s$$

gdzie: macierz $W^+ = VD^+U^T$ nazywana jest macierzą pseudoodwrotną do W (lub czasami nazywaną macierzą odwrotną w sensie Moore'a – Penrose'a [8]) a macierz D^+ możemy obliczyć w sposób następujący:

$$(8) \quad D^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_k}, 0, \dots, 0\right) \in R_{n \times m}.$$

W tomografii komputerowej mamy zazwyczaj do czynienia z przypadkami złego uwarunkowania macierzy współczynników układu równań.

Założmy, że macierz W ma wyznaczony rozkład względem wartości osobliwych (9), gdzie D_d jest macierzą diagonalną zawierającą wartości osobliwe. Różnica w stosunku do macierzy D jest taka że nie ma wierszy zerowych i jest macierzą kwadratową o wymiarze $n \times n$:

$$(9) \quad W = U \begin{bmatrix} D_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} V^T.$$

Na podstawie zależności (7), można wprowadzić oznaczenie w postaci $g = U^T s$:

$$(10) \quad f^* = W^+ s = VD^+ g,$$

i rozważyć liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) (11):

$$(11) \quad \begin{bmatrix} D_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} q \cong g,$$

gdzie: q jest związane z wektorem f liniową transformacją ortogonalną (12):

$$(12) \quad f = Vq.$$

Zagadnienie (11) jest równoważne zagadnieniu $Wf \cong s$ w sensie zagadnienia najmniejszych kwadratów.

Ponieważ D_d jest macierzą diagonalną $D_d = \text{diag}(d_1, \dots, d_k, 0, \dots, 0)$, wpływ każdej składowej na normę residuum jest oczywisty. Wprowadzając składową q_j , jako (13):

$$(13) \quad q_j = \frac{g_j}{d_i},$$

redukuje się sumę kwadratów residuum o wartość q_j^2 .

Zgodnie z regułami dekompozycji wartości osobliwe są ustawione w porządku nierosnącym tzn. $d_k \geq d_{k+1}$ $k=1, 2, \dots, n$. Wtedy naturalną rzeczą jest rozważenie rozwiązań „próbnych” problemu (11) w postaci (14) [15]:

$$(14) \quad q^{(k)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

gdzie: q_j jest dane równaniem (13).

Wektor rozwiązania próbnego $q^{(k)}$ jest rozwiązaniem uzyskanym z (11) za pomocą pseudoinwersji (rozwiązania o minimalnej normie) przy założeniu, że wartości osobliwe d_j dla $j \geq k$ są na tyle małe, że traktujemy je jako wartości zerowe.

Z rozwiązań „próbnych” (ang. *Candidate Solutions* [8]) $q^{(k)}$ można otrzymać wektory rozwiązań $f^{(k)}$ dla zagadnienia $Wf \cong s$, jako (15):

$$(15) \quad f^{(k)} = Vq^{(k)} = \sum_{j=1}^k q_j V^j, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

gdzie: V^j oznacza j -tą kolumnę macierzy V .

Zauważmy, że:

$$(16) \quad \|f^{(k)}\|^2 = \|q^{(k)}\|^2 = \sum_{j=1}^k q_j^2 = \sum_{j=1}^k \left(\frac{q_j}{d_j}\right)^2,$$

gdzie: $\|f^{(k)}\|$ jest niemalejącą funkcją k .

Kwadrat normy związanej z $\|f^{(k)}\|$ jest dany zależnością (17):

$$(17) \quad \|r^{(k)}\|^2 = \|s - Wf^{(k)}\|^2 = \sum_{j=k+1}^m g_j^2.$$

Inspekcja kolumn macierzy V stowarzyszonych z małymi wartościami osobliwymi jest bardzo efektywną metodą identyfikacji zbioru kolumn macierzy W , które są niemal liniowo zależne.

Założmy, że macierz W jest źle uwarunkowana; wtedy pewne wartości osobliwe są znacząco mniejsze od pozostałych. W takim przypadku niektóre z końcowych wartości q_j mogą być niepożądanie wielkie. Można określić indeks k , dla którego wszystkie współczynniki q_j dla $j \leq k$ są dostatecznie małe a wszystkie wartości osobliwe d_j dla $j \leq k$ są dostatecznie duże, zaś norma residuum $r^{(k)}$ jest dostatecznie mała. Jeśli taki indeks istnieje to rozwiązanie „próbnę” $f^{(k)}$ przyjmuje się jako wektor rozwiązań LZNK.

Aby określić preferowany indeks k najwygodniej jest skorzystać z wykresu $\|r^{(k)}\| = f(\|f^{(k)}\|)$ w skali logarytmicznej [8]. Dla zadań źle uwarunkowanych mamy wówczas wykres w kształcie litery „L” (niektórzy autorzy mówią o kształcie zbliżonym do hiperboli) i stosunkowo łatwo daje się określić optymalną wartość indeksu k .

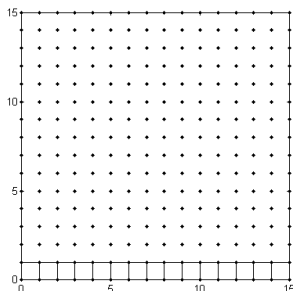
W przypadku danych syntetycznych zaszumionych lub danych pomiarowych, zadanie to już nie jest takie proste i bardzo często cała rodzina rozwiązań próbnych jest położonych blisko siebie na wykresie $\|r^{(k)}\| = f(\|f^{(k)}\|)$,

ale dające różne obrazy [11,15]. Wtedy z pomocą, jako dodatkowe kryterium, może być pomocny rozkład wartości osobliwych (patrz na przykład rysunek 12).

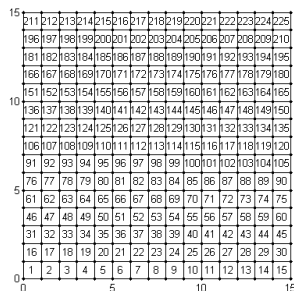
Przykład konstrukcji obrazu w przestrzeni 2D

Rozpatrzmy obiekt o przekroju poprzecznym w kształcie kwadratu jak pokazano na rysunku 2. Przykładową rozdzielczość przestrzenną zaproponowano na poziomie 15×15 pikseli.

Przekrój poprzeczny może mieć kształt dowolny, jednak ze względów praktycznych wybrano najprostszy z możliwych, czyli kwadratowy.



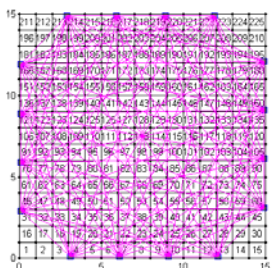
Rys. 2. Rozpatrywany obszar z naniesionymi węzłami i pierwszą warstwą pikseli



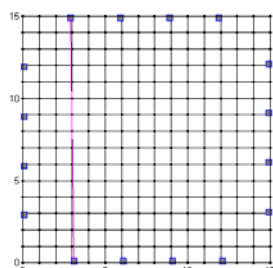
Rys. 3. Ponumerowane piksele w rozdzielczości 15×15

Na brzegu obszaru podzielonego siatką kwadratową na piksele (patrz rysunek 2 i rysunek3) rozmieszczono po cztery nadajniki/odbiorniki jak pokazano na rysunku 4.

Ze względu na specyfikę obszaru i jego podziału na kwadratowe piksele nadajniki/odbiorniki zostały przesunięte od pierwotnej pozycji, tak aby żaden z promieni nie leżał na granicy pikseli. Takie położenie utrudnia przypisanie promienia do danego piksela i w konsekwencji utrudnia sformowanie macierzy współczynników układu równań (3).



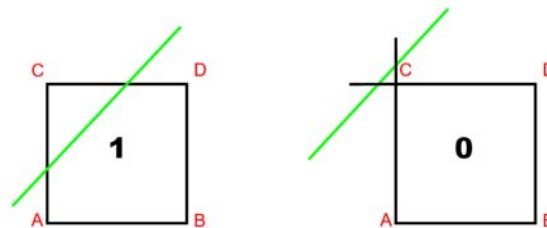
Rys. 4. Rozlokowanie czujników ultradźwiękowych na brzegu obszaru



Rys. 5. Przesunięcie czujnika nr. 1 o dx w prawo a czujnika 12 o dx w lewo tak, aby promień 1 – 12 nie pokrywał się z pionową linią podziału obszaru na piksele

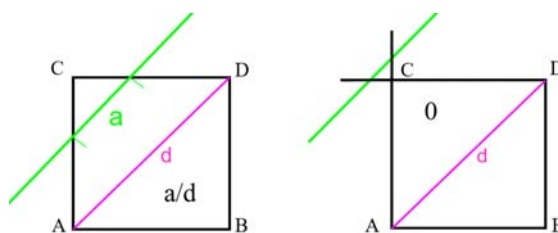
Mając wyznaczone numery pikseli, przez które przechodzą poszczególne promienie, można zastosować jedną z implementacji algorytmu ART [6,7]. Przy małych rozmiarach pikseli nie liczymy pól zakreślanych przez poszczególne wiązki.

Przyjęto, że jeżeli promień przechodzi przez dany piksel wówczas w macierzy W (patrz wzór (3)) na pozycji odpowiadającej numerowi piksela wstawiamy „1”. W pozostałych przypadkach, gdy promień nie przechodzi przez piksel wstawiamy „0” do tej macierzy. Rysunek 6 obrazuje powyższą zasadę [7].



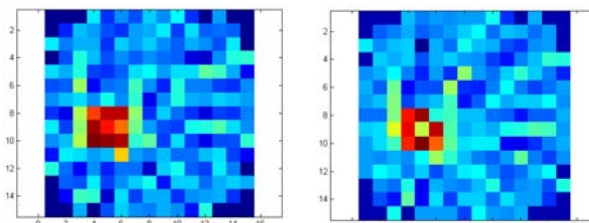
Rys. 6. Zasada wyznaczania elementów macierzy współczynników dla siatki kwadratowej

Najczęściej stosuje się prostą modyfikację metody ART, polegającą na tym, że w odpowiednie miejsca zamiast zer lub jedynek wstawiamy obliczony stosunek długości odcinków: promienia wewnątrz piksela oraz długości przekątnej danego piksela. Zasadę tą obrazuje poniższy rysunek [15].



Rys. 7. Zasada wyznaczania elementów macierzy współczynników W

Na rysunku 8 przedstawiono obrazy uzyskane metodą „zero jedynekową” i metodą stosunku długości promienia przechodzącego przez piksel do długości przekątnej.



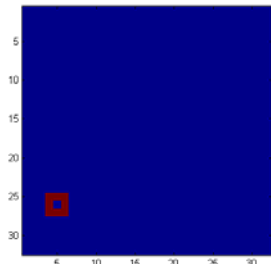
Rys. 8. Obrazy uzyskane za pomocą metody „zero – jedynekowej” po lewej stronie i po prawej stronie metodą stosunku długości promienia do długości przekątnej danego piksela

Jak widać z porównania tych dwóch obrazów, różnią się one od siebie bardzo niewiele. Jak się później przekonamy nieco lepszej jakości jest obraz uzyskany gdy zastosowano zasadę obliczania stosunku długości odcinków promienia wewnątrz piksela oraz długości przekątnej danego piksela, zgodnie z rysunkiem 7.

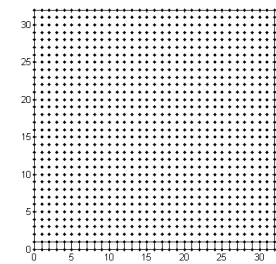
Zwiększenie rozdzielczości przestrzennej obrazu

W technikach tomograficznych zawsze najbardziej istotnym zagadnieniem, w szczególności w bioinżynierii medycznej, jest rozdzielczość przestrzenna. Oznacza to między innymi zdolność wykrywania jak najdrobniejszych szczegółów obrazu. Zbadajmy wpływ wielkości obiektu na zdolność jego identyfikacji. Zbadajmy możliwość obrazowania znacznie mniejszego obiektu, którego bok wynosi 9.375% długości całego obiektu jak na rysunku 9.

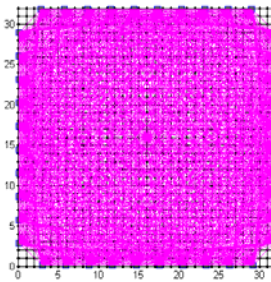
W tym celu konieczne jest zwiększenie dyskretyzacji (zmniejszenie rozmiaru pikseli jak pokazano na rysunku 10, co pociąga za sobą zwiększenie ich liczby), oraz zwiększenie liczby czujników (rysunek 11), aby zachować nadokreśloność wynikowego układu równań (patrz równanie (3)).



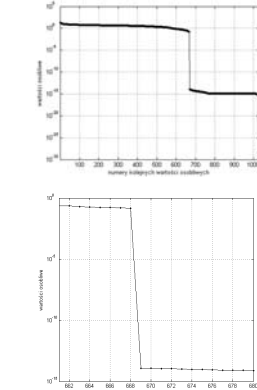
Rys. 9. Model poszukiwanego obiektu



Rys. 10. Zwiększona dyskretyzacja rozpatrywanego obszaru z naniesionymi węzłami i pierwszą warstwą pikseli



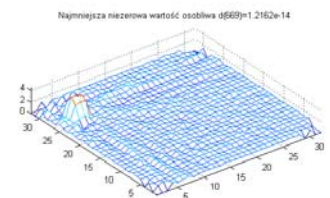
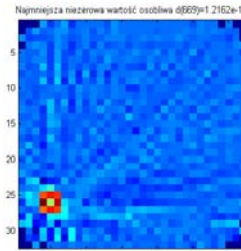
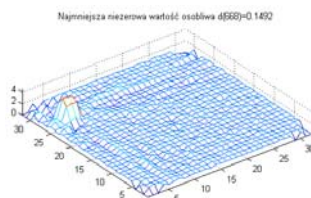
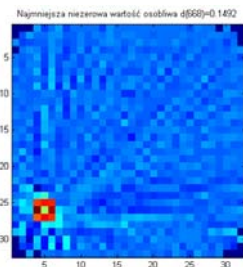
Rys. 11. Rozlokowanie czujników ultradźwiękowych na brzeg obszaru i obraz promieni



Rys. 12. Rozkład wartości osobliwych (u góry) i wybranych wartości osobliwych (u dołu)

Dla tak postawionego zadania sformułowano nadokreślony układ równań, który rozwiązano stosując metodę SVD [8,11]. Dane syntetyczne nie były zasumione, dlatego na wykresach z rysunku 12 widać wyraźnie zbiór wartości osobliwych różnych od zera (668) i zbiór wartości osobliwych, które można traktować jako bliskie zera. Na tej podstawie można stwierdzić, że macierz współczynników równania była niepełnego pseudo rzędu. Tak wyraźna granica jest możliwa jedynie w przypadku niezasumionych danych syntetycznych. Gdy mamy dane zasumione, ta granica nie będzie już taka wyraźna i określenie pseudo-rzędu macierzy i numeru rozwiązania próbnego staje się bardziej problematyczne [7,11,15].

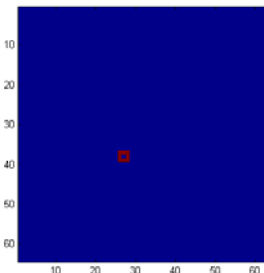
Rodzina trzech obrazów z okolic tej granicy została przedstawiona na rysunku 13. Można stwierdzić że rozwiązanie tuż przed i tuż po skoku wartości osobliwych, jest prawie identyczne i że obiekt co do kształtu, rozmiarów i położenia został zidentyfikowany poprawnie. Ale obiekt jest również dobrze widoczny na trzecim z obrazów.



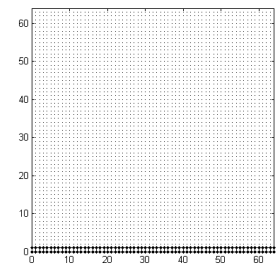
Rys. 13. Obrazy uzyskane dla 661 i kolejnych trzech rozwiązań próbnych oraz odpowiadające im rozkłady przestrzenne gęstości współczynnika materiałowego

Zbadajmy dalsze zmniejszenie obiektu poszukiwanego tak aby wymiar jego boku (obiekt jest kwadratowy) wynosił 4.69% długości boku rozpatrywanego obszaru.

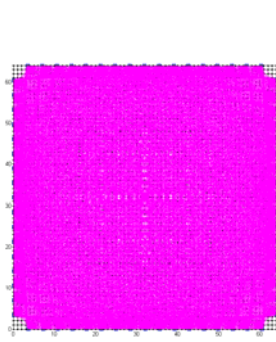
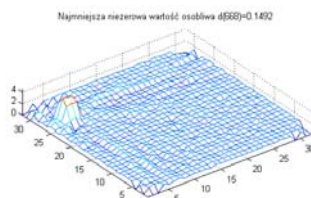
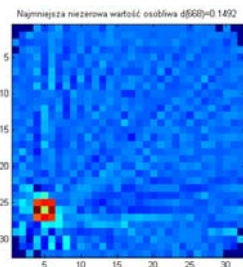
W tym wypadku dyskretyzacja wzrośnie do 64x64 piksele oraz liczba czujników do 17 na każdym boku obszaru kwadratowego. W celu utrudnienia zadania poszukiwany obiekt został dodatkowo przesunięty do środka obszaru (rysunek 14), gdzie wrażliwość na zmianę gęstości (współczynnika materiałowego) jest najmniejsza, a więc obrazowanie obarczone jest największym błędem.



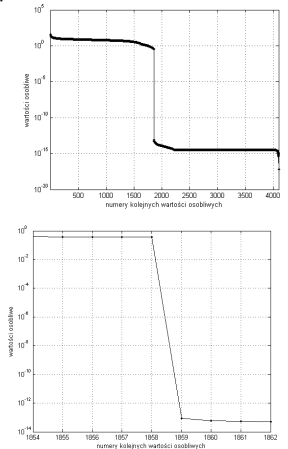
Rys. 14. Model poszukiwanego obiektu



Rys. 15. Zwiększona dyskretyzacja rozpatrywanego obszaru z naniesionymi węzłami i pierwszą warstwą pikseli



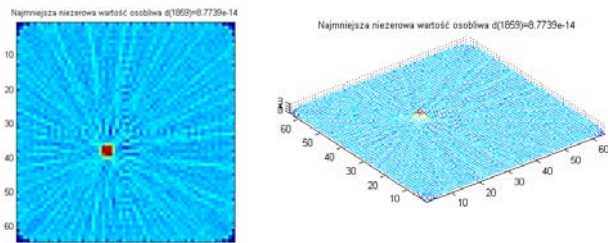
Rys. 16. Rozlokowanie czujników ultradźwiękowych na brzeg obszaru



Rys. 17. Rozkład wartości osobliwych (u góry) i wybranych wartości osobliwych (u dołu)

Jak widać na rysunku 16 cały badany obszar jest gęsto pokryty promieniami. Jedynie w samych końcówkach naroży mamy wolne fragmenty obszaru, co później odbije się na jakości obrazowania. Granica wartości osobliwych uznawanych za zerowe (10^{15}), została przesunięta w stosunku do zadania poprzedniego.

Położenie i rozmiar obiektu jest wykryty prawidłowo, jednak otwór w jego wnętrzu nie został zobrazowany prawidłowo (rysunek 18). Podobnie jak i w poprzednich przypadkach w narożnikach obszaru występują wyraźne artefakty.



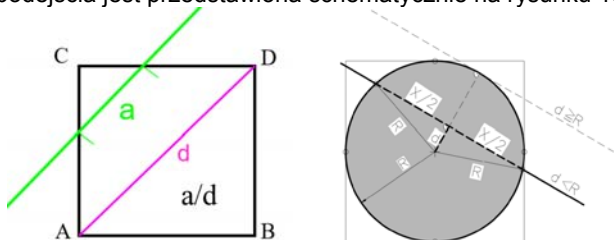
Rys. 18. Obrazy uzyskane dla 1859-tego rozwiązania próbnego oraz odpowiadający mu rozkład przestrzenny gęstości współczynnika materiałowego

Spowodowane to jest rozmieszczeniem czujników, które nie pokrywają promieniami właśnie tych naroży. Wadę tą można łatwo usunąć umieszczając czujniki w taki sposób, aby promienie przechodziły przez te obszary.

Nowy algorytm tworzenia obrazu polegający na zmianie kształtu piksela

Tradycyjny algorytm wymagał dla każdego z czterech boków kwadratowego piksela, wyznaczenia punktu przecięcia odcinka (promień) z odcinkiem (bok piksela – kwadratu). Przy znacznej liczbie pikseli zadanie to oznaczało ogromne zaangażowanie procesora. Dlatego głównym zadaniem tego artykułu, jest zaproponowanie znacznie prostszej metody identyfikacji numeru piksela, przez który przechodzi dany promień.

Metoda polega na zmianie kształtu piksela z kwadratowego na kołowy. Dla takiego podejścia zamiast czterech zadań „punkt przecięcia odcinka z odcinkiem” zastąpiono tylko jednym zadaniem porównania odległości promienia od środka piksela, czyli rozwiązania tylko jednego zadania wyznaczenia odległości punktu (środek kołowego piksela) od odcinka (promień). Idea tego podejścia jest przedstawiona schematycznie na rysunku 19.



Rys. 19. Zasada wyznaczenia elementów macierzy współczynników W w przypadku piksela w kształcie kwadratu i w kształcie koła

Dla zmodyfikowanego kołowego kształtu piksela, zamiast czterech skomplikowanych zadań [15], mamy tylko jedno, o mniejszym stopniu komplikacji. Zadanie polega na określeniu czy odległość środka koła od odcinka (promień) jest mniejsza niż promień koła reprezentującego piksel.

Nadto łatwo możemy policzyć stosunek długości promienia przechodzącego przez dany piksel do długości średnicy piksela (poprzednio do przekątnej piksela) (rysunek 19).

Długość promienia przechodzącego przez dany piksel możemy policzyć z następującej zależności:

$$(18) \quad x = 2\sqrt{R^2 - d^2},$$

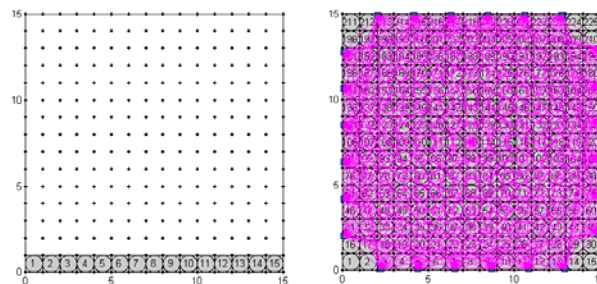
gdzie: x – jest długością promienia przechodzącego przez dany piksel, d – jest odległością środka piksela od promienia.

Kluczową sprawą jest wyznaczenie odległości d środka piksela od promienia. Z pomocą przychodzi nam wbudowana funkcja MATLAB-a o nazwie `distancePoint2Line` [18], wywoływana z parametrem `'segment'`. Parametr ten najlepiej odpowiada promieniowi, który jest odcinkiem prostej łączącej nadajnik z odbiornikiem.

Następnie w stosownym miejscu macierzy W wstawiamy stosunek długości promienia do średnicy piksela, przez który promień przechodzi, zgodnie ze wzorem:

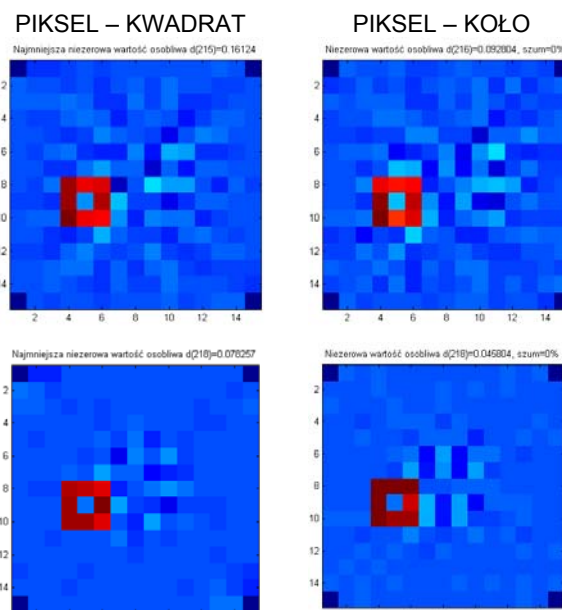
$$(19) \quad W_{ij} = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2}$$

Zmiana kształtu piksela z kwadratowego na kołowy w badanym obszarze przedstawiona jest na rysunku 20.



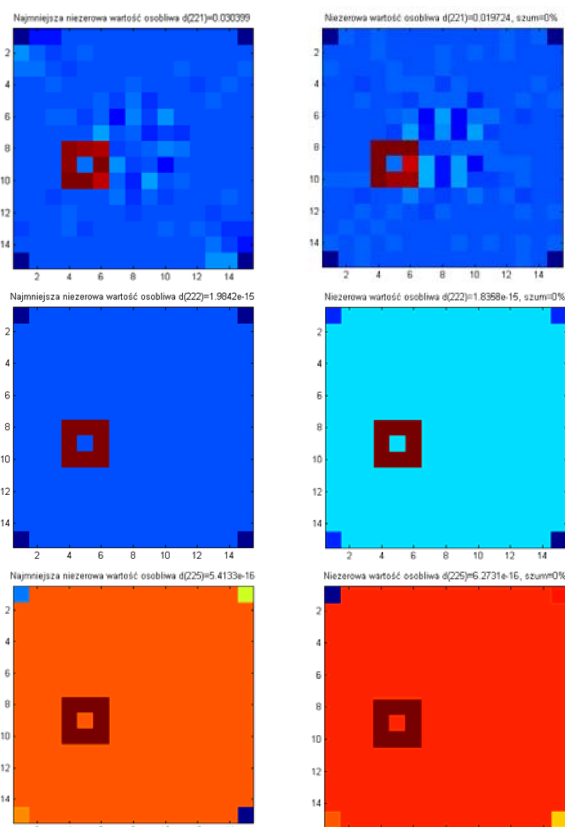
Rys. 20. Zmiana kształtu piksela

Rezultaty obrazowania nowym algorytmem w porównaniu do algorytmu poprzedniego, przedstawiono na poniższych rysunkach.



Rys. 21. Porównanie wyników obrazowania przed (lewa strona) i po (prawa strona) zmianie kształtu piksela

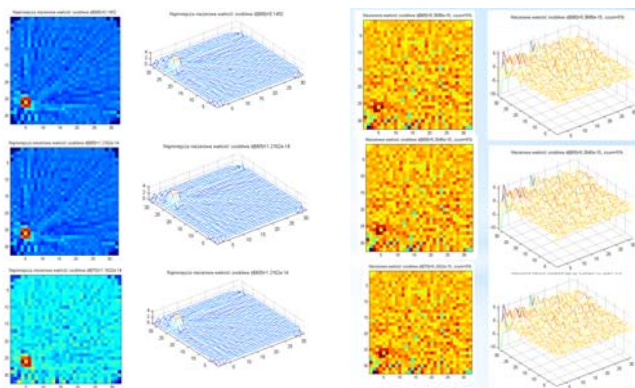
Na pierwszy rzut oka, różnice między obrazami z rysunków 21 są nieznaczne. Jednak jak przejrzymy kilka rozwiązań próbnych, stają się one bardziej widoczne.



Rys. 22. Porównanie wyników obrazowania przed (lewa strona) i po (prawa strona) zmianie kształtu piksela

Jak widać z przedstawionych wyników, obrazowanie nie ustępuje metodzie z kwadratowym pikselem. Warto zauważyć, że przyspieszenie algorytmu dla przedstawionej rozdzielczości było aż 13-to krotne.

Jedną z wad tego sposobu obrazowania i to niezależnie od kształtu piksela, jest stosunkowo duża wrażliwość na zaszumienie danych. Wpływ takiego, stosunkowo niewielkiego bo 5% zaszumienia, ilustrują wyniki przedstawione poniżej.



Rys. 23. Porównanie obrazowania na podstawie danych bez i z szumem 5%

Zbadajmy jaki wpływ na obrazowanie ma zwiększenie liczby pikseli i promieni. Zadanie jest trudniejsze, bo obiekt jest mniejszy i większa jest rozdzielczość przestrzenna.

Różnice pomiędzy danymi syntetycznymi bez zaszumienia a danymi z szumem 5% dla piksela kołowego,

jest widoczna na rysunku 23. Tło obrazu jest bardziej niespokojne, ale na obrazie obiekt wewnętrzny jest całkiem wyraźnie widoczny. Jednak należy zauważyć, że to porównanie zostało dokonane przy uwzględnieniu tej samej liczby wartości osobliwych dla obu kształtów pikseli.

Poniżej wykażemy, że dla piksela kołowego, możemy osiągnąć prawie identyczny obraz, ale musimy zmniejszyć liczbę wartości osobliwych. Na skutek przybliżenia piksela kwadratowego kołowym, uzyskujemy macierz współczynników o mniejszym pseudo – rzędzie niż poprzednio, dlatego aby uzyskać pożądane rozwiązanie, musimy zmniejszyć liczbę wartości osobliwych.

Zwiększanie rozdzielczości - algorytm tworzenia obrazu w oparciu o zmianę kształtu piksela

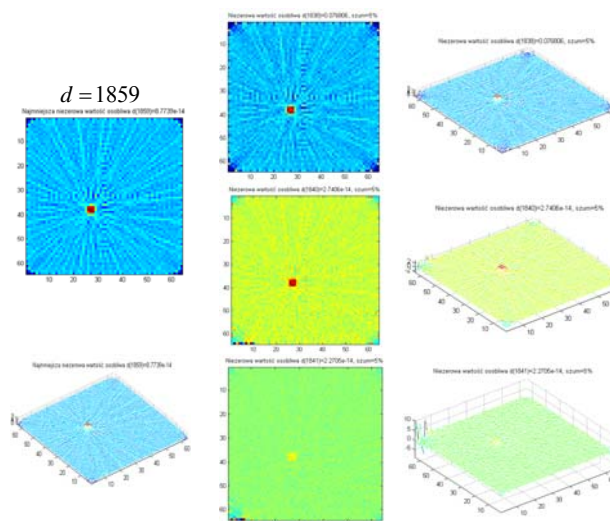
Naczelnym zadaniem obrazowania nie tylko w biomedycynie ale także w technice, jest pozyskiwanie obrazów o możliwie jak największej rozdzielczości przestrzennej. Postaramy się zbadać jak temu wyzwaniu jest w stanie sprostać algorytm z pikselami w kształcie koła.

Panuje powszechna opinia, że dla tego typu algorytmów granicą rozdzielczości przestrzennej jest obiekt o rozmiarach około 10% rozmiarów badanego obszaru.

Biorąc pod uwagę zaproponowany algorytm zbadajmy jego możliwości wykrycia małych obiektów wewnątrz badanego obszaru. Rozpatrzmy obiekt stanowiący niecałe 5% długości boku rozpatrywanego obszaru.

W celu utrudnienia zadania umieścimy ten obiekt w środku obszaru, gdzie wrażliwość współczynnika materiałowego na zmiany wielkości mierzonych na brzegu, jest najmniejsza.

Rezultaty obrazowania przedstawiono na poniższych rysunkach.



Rys. 24. Porównanie wyników obrazowania przed i po zmianie kształtu piksela dla zwiększonej rozdzielczości

Po lewej stronie rysunku mamy wyniki dla pikseli o kształcie kwadratu i obraz był uzyskany przy uwzględnieniu 1859 wartości osobliwych. W kolumnie środkowej mamy trzy obrazy dla 1838, 1840 i 1841 wartości osobliwych dla kołowych pikseli.

Obraz z wtrąceniem powoli, w miarę uwzględniania kolejnych wartości osobliwych zanika. I choć na pierwszy rzut oka obraz dla pikseli kwadratowych nie różni się wiele od obrazu górnego środkowej kolumny, to jednak dla pikseli kołowych musieliśmy odrzucić aż 21 wartości osobliwych więcej, aby uzyskać czytelny obraz. Widać więc, że różnice są jednak znaczne i wymagają bacznej uwagi w wyborze rozwiązania próbnego.

Co jest istotne w tym przypadku to to, że przyspieszenie algorytmu było aż 18 to krotne.

Konkluzja

Na podstawie przeprowadzonych badań, można stwierdzić że, obrazowania metodą ART są podatne na szum typu „sól i pieprz” (ang. *salt & pepper*). Błędy wynikają między innymi z przybliżeń kwadratowych pikseli przez piksele o kształcie koła. Macierz jest nieco inna o z reguły niższym pseudo – rzędzie. Pozyskanie prawidłowego rozwiązania wymaga zatem odrzucenia większej liczby wartości osobliwych o małych wartościach, które możemy uznać jako zerowe.

Z przeprowadzonych badań wynika, że zmodyfikowany algorytm nadaje się równie dobrze do obrazowania jak algorytm poprzedni, z dodatkową bardzo istotną zaletą w postaci kilkunastokrotnego przyspieszenia, w zależności od przyjętej rozdzielczości przestrzennej.

Authors:

Dr mgr inż. Tomasz Rymarczyk, Centrum Badawczo-Rozwojowe, NETRIX S.A., Związkowa 26, 20-148 Lublin, e-mail: tomasz.rymarczyk@netrix.com.pl

prof. dr hab. inż. Jan Sikora, Electrical Engineering and Computer Science Faculty, Lublin University of Technology, 20-618 Lublin 38A Nadbystrzycka str., e-mail: sik59@wp.pl

dr hab. inż. Krzysztof Polakowski, The Faculty of Electrical Engineering, Warsaw University of Technology, 00-661 Warszawa, Pl. Politechniki 1, email: Krzysztof.Polakowski@ee.pw.edu.pl

dr mgr inż. Przemysław Adamkiewicz, Centrum Badawczo-Rozwojowe, NETRIX S.A., Związkowa 26, 20-148 Lublin, e-mail: p.adamkiewicz@netrix.com.pl

LITERATURA

- [1] Adamkiewicz P., Rymarczyk T., Duda K., Szumowski J., Sikora J.: New Electrical Tomographic Method to Determine Dampness in Historical Buildings. Vol. 65, Issue 2, Archives of Electrical Engineering (2016), 273-283.
- [2] Bocca M, Kaltiokallio O., Patwari N., Venkatasubramanian S., Multiple Target Tracking with RF Sensor Networks, *Mobile Computing IEEE Transactions on*, vol. 13, (2014), 1787-1800, ISSN 1536-1233.
- [3] Das Y., Boerner W.M.: On Radar Target Shape Estimation Using Algorithms for Reconstruction from Projections, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-26(2), (1978).
- [4] Gudra T., Opieliński K.J.: The multi-element probes for ultrasound transmission tomography, *Journal de Physique* 4, (2006), 137, 79–86.
- [5] Herman G.T., *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, New York, (1980).
- [6] Kaczmarz S., Angenäherte Auflösung von Systemen Linearer Gleichungen, *Bull. Acad. Polon. Sci. Lett. A*, vol. 6–8A, (1937), 355–357.
- [7] Kak A.C., Slaney M., *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York, (1999).
- [8] Lawson Ch.L., Hanson R.J., *Solving Least Squares Problems*, „Classics in Applied Mathematics” 15, SIAM, (1995).
- [9] Santosh Nannuru, Yunpeng Li, Yan Zeng, Mark Coates, and Bo Yang, Radio – Frequency Tomography for Passive Indoor Multitarget Tracking, *IEEE Transactions on Mobile Computing*, vol. 12, (2013), no. 12.
- [10] Opieliński K., Analiza możliwości zobrazowania struktury wewnętrznej obiektów metodą ultradźwiękowej tomografii transmisyjnej, rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, (1998).
- [11] Polakowski K., Wpływ wartości osobliwych na jakość obrazów wielościeżkowej tomografii ultradźwiękowej, „Prace Instytutu Elektrotechniki”, 242, (2009), 75–87.
- [12] Rybak G., Chaniecki Z., Grudzień K., Romanowski A., Sankowski D.: Nieinwazyjne metody kontrolno-pomiarowe w zastosowaniach przemysłowych, *IAPGOS 2014*; 4 (3): 41-45; DOI: 10.5604/20830157.1121349
- [13] Rymarczyk T., Charakteryzation of the shape of unknown objects by inverse numerical methods, *Przegląd Elektrotechniczny*, vol. 88, issue 7B, (2012), 138-140.
- [14] Sikora J., *Boundary Element Method for Impedance and Optical Tomography*, Warsaw University of Technology Publisher, (2007).
- [15] Polakowski K., Sikora J., *Podstawy matematyczne obrazowania ultradźwiękowego*, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, (2016).
- [16] *Electrical Capacitance Tomography: Theoretical Basis and Applications*, edited by D. Sankowski and J. Sikora, Wydawnictwo IEL, Warszawa 2010. *Electrical Capacitance Tomography: Theoretical Basis and Applications*, edited by D. Sankowski and J. Sikora, Wydawnictwo IEL, Warszawa 2010.
- [17] Wilson J., Patwari N., *Radio Tomographic Imaging with Wireless Networks* http://span.ece.utah.edu/uploads/RTI_ver_sion_3.pdf
- [18] <http://www.mathworks.com/products/matlab/> [dostęp: styczeń 2016].