

# Rozpoznawanie i rekonstrukcja obrazów jako problem odwrotny z zastosowaniem systemu uczenia maszynowego

**Streszczenie.** Rekonstrukcja i rozpoznawanie obrazów jest typowym problemem występującym w wielu systemach przetwarzania obrazów. Zagadnienie to można sformułować jako rozwiązanie problemu odwrotnego. W artykule zaprezentowano autorski model systemu uczenia maszynowego, który może być wykorzystany do rekonstrukcji i rozpoznawania obrazów na podstawie ich liniowych projekcji.

**Abstract.** Image reconstruction and recognition is a common problem found in many image processing systems. This problem can be formulated as a solution to the inverse problem. The article presents the author's model of a machine learning system that can be used for the reconstruction and recognition of images based on their linear projections. (Image Recognition and Reconstruction as Inverse Problem, Using Machine Learning System).

**Słowa kluczowe:** systemy uczenia maszynowego, rekonstrukcja i rozpoznawanie obrazów, problem odwrotny

**Keywords:** machine learning systems, image reconstruction and recognition, inverse problem.

## Wstęp

Systemy rekonstrukcji i rozpoznawania obrazów wykorzystujące klasyczne metody są obecnie uzupełniane i częściowo zastępowane systemami sztucznej inteligencji do których zaliczane są także algorytmy uczenia maszynowego. Przegląd metod uczenia maszynowego w rozpoznawaniu obrazów ze szczególnym uwzględnieniem zastosowań medycznych można znaleźć w pracach [1-4]. Warto zauważyć, że obecne systemy rekonstrukcji i rozpoznawania obrazów oparte są najczęściej na algorytmach optymalizacji z ograniczeniami przy zastosowaniu odpowiednio dobranych metod regularyzacji [5].

Ostatnio szeroko stosowane algorytmy głębokiego uczenia spowodowały renesans zainteresowania sztucznymi sieciami neuronowymi oraz różnego rodzaju ich aplikacjami. Większość znanych algorytmów głębokiego uczenia posiada swoje implementacje w postaci sztucznych sieci neuronowych (Artificial Neural Networks) oraz sztucznych sieci neuronowych głębokiego uczenia (Deep Learning Neural Networks) wyuczonych na podstawie zbioru danych uczących poprzez minimalizację funkcji strat. W tym kontekście podejście do głębokiego uczenia może być postrzegane jako szczególny przypadek z zakresu teorii metod optymalizacji. Standardowe typy sieci neuronowych głębokiego uczenia obejmują wielowarstwowe perceptrony (MLP), spłotowe sieci neuronowe (CNN), rekurencyjne sieci neuronowe (RNN) i generatywne sieci kontrykcyjne (GAN) [6-9]. Analizując dostępne publikacje można stwierdzić, że optymalna topologia sieci i technologia jej implementacji nie została jeszcze określona. Nie jest także dobrze zbadany związek topologii sieci z jej wydajnością [10]. Niemniej, można stwierdzić, że SNN stanowią uniwersalne modele algorytmiczne i fizyczne stosowane w systemach inteligencji obliczeniowej. Jednym z podtypów SNN są sieci neuronowe typu Hopfielda, które są zarówno modelami fizycznymi jak i algorytmami stosowanymi w obliczeniach neuronowych. We wcześniejszych pracach zaproponowaliśmy rozszerzony model sieci neuronowej typu Hopfielda zdefiniowany przez następujące równanie [11]:

$$(1) \quad \dot{x} = (\eta W - w_0 \mathbf{1} + \varepsilon W_s) \theta(x) + I_d$$

gdzie:  $W$ —skośnie symetryczna macierz ortogonalna;  $W_s$ —macierz rzeczywista symetryczna;  $\mathbf{1}$ —macierz jednostkowa;  $\theta(x)$ —wektor funkcji aktywacji;  $I_d$ —wektor wejściowy;  $\varepsilon, w_0, \eta$ —parametry

Równanie (1) w stanie równowagi sieci przyjmuje postać:

$$(2) \quad (\eta W - w_0 \mathbf{1} + \varepsilon W_s) \theta(x) + I_d = 0$$

Równanie (2) stanowi bazę dla uniwersalnych modeli uczenia maszynowego opartych na przekształceniach biortogonalnych, umożliwiających realizację typowych funkcji systemów uczenia się. Jedną z tych funkcji jest implementacja pamięci asocjacyjnych. Zastosowanie systemu do rekonstrukcji i rozpoznawania zniekształconych/zaszumionych obrazów z wykorzystaniem pamięci asocjacyjnej było opisane szerzej w pracach [11-13].

W bieżącej pracy przebadana została implementacja systemu uczenia maszynowego do rozwiązywania problemów odwrotnych (Inverse Problem). W ogólnym przypadku zagadnienie odwrotne polega na wyznaczeniu przyczyny (danych wejściowych) na podstawie skutku (danych wyjściowych). W przedstawionych w pracy doświadczeniach oryginalny obraz był przetwarzany przez liniowy operator macierzowy, którego wymiar nie był kwadratowy. Nie istniał zatem operator odwrotny w sensie algebry macierzowej. Odpowiednio zaprojektowany system uczenia maszynowego wykonywał rekonstrukcję oryginalnego obrazu na podstawie jego projekcji.

## System uczenia maszynowego do przetwarzania obrazów

Rozważamy zbiór  $N$  czarno-białych obrazów reprezentowanych przez  $k$  wierszy i  $l$  kolumn, czyli zbiór  $(k \cdot l)$  pikseli o różnych odcieniach szarości. W przypadku analizy wektorowej każdy obraz jest przekształcany przez konkatenację w wektor kolumnowy  $x_i$  ( $k \cdot l \times 1$ ),  $i = 1, \dots, N$ . Tak więc zbiór  $N$  obrazów jest reprezentowany przez następującą macierz:

$$(3) \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_N], \dim x_i = k \cdot l = 2^q, q = 3, 4, \dots,$$

Zbiór zniekształconych obrazów reprezentowany jest przez macierz:

$$(4) \quad X^{(s)} = [x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_N^{(s)}]$$

Łatwo zauważyć, że zbiór treningowy można zapisać następująco:

$$(5) \quad S = \{x_i, x_i^{(s)}\}_{i=1}^N$$

Zbiór  $S$  tworzy odwzorowanie  $F(\cdot)$  zdefiniowane przez następujące właściwości:

$$(6) \quad x_i = F(x_i)$$

oraz

$$(7) \quad x_i^{(s)} \xrightarrow{F} x_i, i = 1, 2, \dots, N.$$

W ten sposób odwzorowanie  $F$  jest zaimplementowane jako system uczenia maszynowego do rekonstrukcji obrazu. Strukturę realizującą odwzorowanie  $F(\cdot)$  określoną równaniami (6) i (7) można otrzymać jako rozwiązania równania równowagi (2). Zatem dla parametrów  $w_0 = 2$ ,  $\varepsilon = 1$  w równaniu 2 otrzymujemy:

$$(8) \quad (W_{2^k} - 2 \cdot \mathbf{1} + W_s) \mathbf{m}_i + x_i^{(s)} = \mathbf{0}$$

gdzie:  $W_{2^k}^2 = -\mathbf{1}$ , skośnie-symetryczna macierz ortogonalna

Uzyskujemy zatem  $N$  rozwiązań:

$$(9) \quad \mathbf{m}_i = (2 \cdot \mathbf{1} - W_s - W_{2^k})^{-1} x_i^{(s)}, i = 1, \dots, N$$

gdzie

$$(10) \quad W_s = M(M^T M)^{-1} M^T$$

$$(11) \quad M = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_N\}$$

jest macierzą widmową wektorów  $x_i$

$$(12) \quad \mathbf{m}_i = \frac{1}{2} (W_{2^k} + \mathbf{1}) x_i$$

tak więc

$$(13) \quad x_i = (-W_{2^k} + \mathbf{1}) \mathbf{m}_i, i = 1, \dots, N.$$

Wektory  $x_i$  stanowią tzw. wektory systemowe  $\mathbf{u}_i \equiv x_i, i = 1, \dots, N$ .

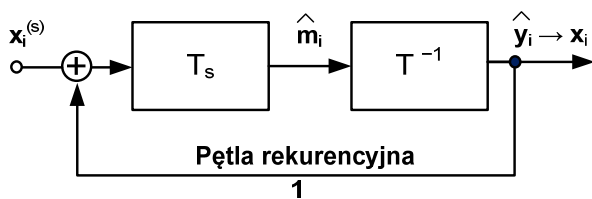
Równanie (9) definiuje transformację biortogonalną  $T_s(\cdot)$ :

$$(14) \quad \mathbf{m}_i = T_s(x_i^{(s)})$$

a równanie (12) transformację ortogonalną:

$$(15) \quad x_i = T^{-1}(\mathbf{m}_i)$$

Transformacje  $T_s(\cdot)$  oraz  $T^{-1}(\cdot)$ , realizujące odwzorowanie  $F(\cdot)$  mają strukturę blokową przedstawioną na rysunku 1[11]. Transformacja ortogonalna  $T_s(\cdot)$ , wykorzystująca rodzinę macierzy Hurwitza–Radona, pozwala na wyznaczenie widm Haara–Fouriera wektorów  $x_i$ .



Rys. 1. Struktura system uczenia maszynowego do przetwarzania obrazów

Struktura z rysunku 1 służy jako estymator widma  $\{\hat{\mathbf{m}}_i\}$ :

$$(16) \quad \hat{\mathbf{m}}_i = T_s(x_i^{(s)}), i = 1, \dots, N$$

W systemie, ze względu na iteracyjny charakter pętli sprzężenia zwrotnego, uzyskuje się zbieżność wektorów:

$$(17) \quad \hat{\mathbf{m}}_i \rightarrow \mathbf{m}_i$$

$$(18) \quad \hat{\mathbf{y}}_i \rightarrow x_i, i = 1, \dots, N.$$

Zbieżność procesu uzyskuje się po  $L$  iteracjach przy czym liczba  $L$  jest różna dla różnych procesów

rekonstrukcji. Ponadto należy zauważyć, że dla obrazu wejściowego  $\mathbf{z} \neq x_i, i = 1, \dots, N$ , wyjście systemu jest dane przez superpozycję wektorów wejściowych:

$$(19) \quad F(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i, \alpha_i \in R$$

Wektory systemowe  $\mathbf{u}_i = x_i$  tworzą centra atrakcji a system z rysunku 1 realizuje funkcję rozłożonej pamięci asocjacyjnej.

### Rozpoznawanie i rekonstrukcja obrazów jako problem odwrotny

Przedstawione w poprzednim rozdziale modele rekonstrukcji obrazu bazują na dostępności zbiorów uczących  $S$ , zawierających oryginalne i uszkodzone wzorce. Alternatywnie, ogólny model rekonstrukcji obrazu może być zapisany równaniem:

$$(20) \quad A\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{y}}$$

gdzie:  $A$ — znany operator liniowy np. operator macierzowy,  $x$ —oryginalny obraz;  $\tilde{\mathbf{y}}$ —obserwowany zdegenerowany obraz

Zgodnie z równaniem (20) rekonstrukcja obrazu prowadzi do rozwiązania problemu odwrotnego. Większość znanych z literatury rozwiązań równania (20) wykorzystuje metody optymalizacyjne [5,14], na przykład:

$$(21) \quad \min_x \|\tilde{\mathbf{y}} - A\mathbf{x}\|_2^2, \text{ s.t. } \mathbf{x} \in K$$

$$\min_x \|\tilde{\mathbf{y}} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \beta R(\mathbf{x})$$

$K$ —zbiór dopuszczalnych rozwiązań;  $R(\mathbf{x})$ —regularyzator ;  $\beta$ —parameter regularyzacji

Jak wspomniano powyżej, różne typy sieci neuronowych są obecnie wykorzystywane do rozwiązywania odwrotnych problemów w obrazowaniu, w tym rekonstrukcji obrazu. Wiele podejść do tego problemu można znaleźć w pracach przeglądowych [14-16]. Wykorzystanie modelu uczenia maszynowego pokazanego na rysunku 1 do rozwiązania równania (20) prowadzi do rozwiązania następującego problemu:

$$(22) \quad F(\mathbf{x}): A\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{x} = F^{-1}(\tilde{\mathbf{y}})$$

gdzie:  $A$ —  $(m \times n)$  znana macierz rzeczywista,  $m \neq n$ ;  $\tilde{\mathbf{y}}$ —  $(m \times 1)$  macierz rzeczywista;  $\mathbf{x}$ —  $(n \times 1)$  macierz rzeczywista;  $m + n = 2^q, q = 3, 4, \dots$

Przypadek  $m = n$  nie jest rozważany. Generacja zbioru uczącego  $S = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$  dla równania (20) jest dana wzorem:

$$(23) \quad A\mathbf{x}_i = y_i, i = 1, 2, \dots, N$$

gdzie  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$  są postaciami wektorowymi oryginalnych obrazów treningowych. Zakładając, że macierz projekcji  $A$   $(m \times n)$  w równaniu (22) jest macierzą losową, obrazy  $y_i$  zbioru uczącego stają się losowymi wektorami. Przykładowy obraz oraz jego projekcję przedstawiono na rysunku 2.

Wektorowa transformacja wybranego obrazu przyjmuje postać:

$$(24) \quad A\mathbf{x} = y$$

gdzie:  $\dim A = (m \times n), m > n$ .

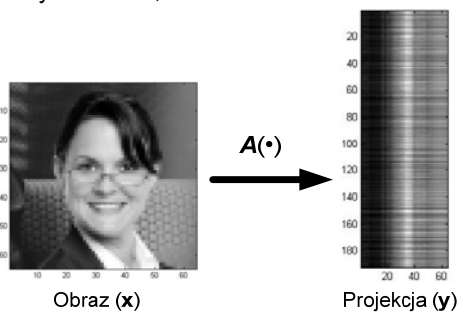
Tworząc wektory systemowe  $\mathbf{u}_i$  o postaci:

$$(25) \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N$$

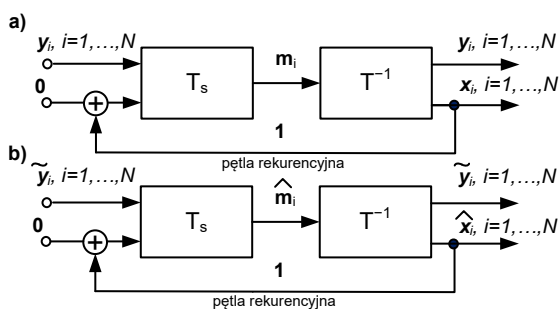
strukturę odwzorowania odwrotnego (22):

$$(26) \quad \mathbf{x}_i = F^{-1}(\mathbf{y}_i), i = 1, \dots, N$$

podano na rysunku 3 a, b.



Rys. 2. Oryginalny obraz oraz jego projekcja (transformacja)



$\hat{x}_i$ —estymator obrazu  $x_i$ ,

$\tilde{y}_i$ —projekcja zdegenerowanego obrazu  $x_i$ .

Rys. 3. Struktura systemu realizującego transformację odwrotną

(a)  $y_i$  – projekcja niezdegenerowanego obrazu

(b)  $\tilde{y}$  – projekcja zdegenerowanego obrazu

Należy zauważyć, że transformacja biortogonalna  $T_s(\cdot)$  i transformacja ortogonalna  $T^{-1}(\cdot)$  na rysunku 3 są określone odpowiednio równaniami (14) i (15):

$$(27) \quad \mathbf{m}_i = T_s \left( \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)$$

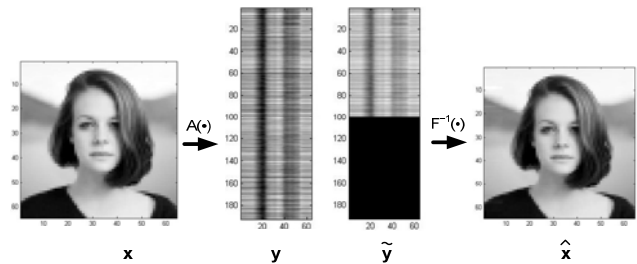
$$(28) \quad \mathbf{u}_i = T^{-1}(\mathbf{m}_i)$$

gdzie:  $\mathbf{u}_i$ —wektory systemowe (25).

W systemie przedstawionym na rysunku 3 zniekształcone rzuty obrazów  $\tilde{y}_i, i = 1, \dots, N$  ulegają rekonstrukcji. Aby zilustrować właściwości systemu rekonstrukcji, przedstawionego na rysunku 3, wygenerowano korzystając z równania (24) zbiór uczący  $S$ . Do generacji zbioru użyto dziewięciu obrazów  $x_i, i = 1, \dots, 9$ . Przykładowe przekształcenie obrazu pokazano na rysunku 4. W układzie pokazanym na rysunku 3b uzyskujemy:

$$(29) \quad \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 = 0$$

Podsumowując, rysunki 1 i 3 przedstawiają systemy rekonstrukcji obrazu, które wykorzystują pamięć asocjacyjną do rozpoznawania uszkodzonych wzorców. Warto jednak zauważyć, że system na rysunku 3 realizuje transformację odwrotną i rozwiązuje zadania optymalizacyjne ograniczone obrazami przechowywanymi w rozłożonej pamięci. Zbieżność ciągu rekurencyjnego zachodzi dla  $N < \frac{1}{2}(n + m)$ .



Rys. 4. Przykładowa rekonstrukcja ( $F(\cdot)$  – system z rysunku 3b)

Ponadto system ten umożliwi również rozwiązywanie równań liniowych (24) przy użyciu losowej postaci wektorów uczących  $x_i$  w równaniu (23). Nową strukturę systemu nauczania maszynowego dla rozwiązania problemu odwrotnego (20), uzyskuje się zatem generując zbiór uczący z wykorzystaniem wektorów losowych  $x_i$  w równaniu (23). Tak więc  $x_i, i = 1, \dots, N$  jest losową formą wektorów (obrazów) treningowych, przy czym:

$$(30) \quad N = m$$

oraz  $y_i, i = 1, \dots, N$  są projekcjami obrazów  $x_i$ . Struktura systemu zadana jest zależnościami (8)-(16) przy czym macierz symetryczna  $W_s(10)$  musi być regularyzowana przez przepis regularyzujący dla macierzy pseudoodwrotnej:

$$(31) \quad W_s = M(M^T M + \gamma I)^{-1} M^T$$

gdzie:  $\gamma > 0$

Wektory systemowe  $\mathbf{u}_i$  mają zatem postać :

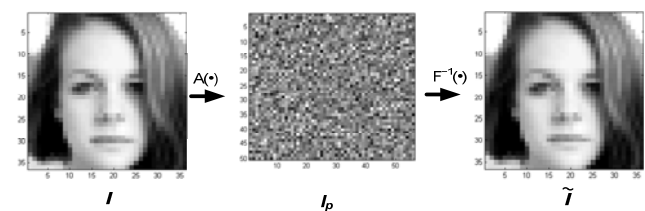
$$(32) \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N, N = m, \dim \mathbf{u}_i = m + n$$

Stąd otrzymuje się stwierdzenie:

Każdy obraz  $I \dim(n \times 1)$  może być zrekonstruowany w systemie z rysunku 1 przy znajomości jego projekcji  $I_p$ :

$$(33) \quad I_p = AI$$

Jakość rekonstrukcji  $\tilde{I}$  mierzona błędem MSE zależy od doboru parametru  $\gamma$ . Przykładową rekonstrukcję obrazu jako rozwiązanie problemu odwrotnego pokazano na rysunku 5.



Rys. 5. Rekonstrukcja obrazu w systemie z losowo wygenerowanymi wektorami systemowymi ( $\gamma = 0.1$ )

Opis doświadczenia przedstawionego na rysunku 5.

Synteza systemu:

- Wygenerowano losowe wektory obrazu  $x_i, i = 1, \dots, 2800, \dim x_i = 1096$ .
- Wygenerowano losową macierz projekcji  $A, \dim A = (2800 \times 1096)$  (współczynniki macierzy  $A$  są losowe o rozkładzie normalnym).
- Wyznaczono projekcje  $y_i$  wektorów  $x_i$ :
$$\mathbf{y}_i = A\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 2800, \dim \mathbf{y}_i = 2800$$
- Wyznaczono wektory systemowe

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 2800, \dim \mathbf{u}_i = 4096$$

- Zgodnie z procedurą zapisaną równaniami (3)–(15) dokonano syntezy systemu z rysunku 1.

#### Rekonstrukcja obrazu

Analizie poddany był obraz o wymiarze (36×36 pikseli), który w procesie konkatencji został przekształcony w wektor  $\mathbf{I}$ ,  $\dim \mathbf{I} = 1096$ . Projekcję uzyskano zgodnie z wzorem (33).

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{A}\mathbf{I}, \quad \dim \mathbf{I}_p = 2800$$

Na potrzeby rysunku wektor  $\mathbf{I}_p$  przedstawiono w postaci macierzy odcieni szarości (50×56 pikseli).

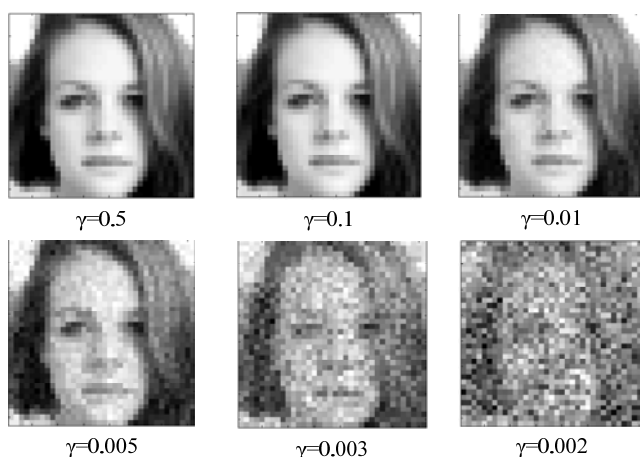
Na wejście systemu wprowadzono wektorową projekcję  $\mathbf{I}_p$  analizowanego obrazu. System rekurencyjnie zrekonstruował wektor  $\tilde{\mathbf{I}}$  przypisany do oryginalnego obrazu. Obraz widoczny na rysunku 5 powstał w procesie odwrotnym do konkatencji z wektora  $\tilde{\mathbf{I}}$ .

Jakość rekonstrukcji była oceniana na podstawie błędu średniokwadratowego  $MSE(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$  między oryginalnym obrazem a uzyskaną w systemie repliką. Wartości błędu średniokwadratowego w zależności od wartości parametru regularyzującego  $\gamma$  w równaniu (31) zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Zależność błędu średniokwadratowego rekonstrukcji obrazu od wartości parametru regularyzującego

Parametr regularyzujący $\gamma$	$MSE(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$
0.5	$4.7 \cdot 10^{-10}$
0.1	$6.2 \cdot 10^{-8}$
0.01	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.005	0.003
0.003	0.022
0.002	0.154
0.001	proces rozbieżny

Na rysunku 6 zobrazowano graficznie wpływ parametru  $\gamma$  na jakość rekonstrukcji obrazu w systemie uczenia maszynowego. Zaobserwowano pewną graniczną wartość parametru regularyzującego poniżej której proces rekonstrukcji jest rozbieżny.



Rys. 6. Wpływ parametru regularyzującego  $\gamma$  na jakość rekonstrukcji obrazu

#### Podsumowanie

Celem artykułu jest prezentacja rozwiązania problemu odwrotnego z wykorzystaniem autorskiego modelu uczenia maszynowego. Źródłem rozpatrywanego problemu

odwrotnego są równania liniowe, które są często stosowanymi modelami w rekonstrukcji obrazów. Szczególnie interesujący jest model uczenia maszynowego oparty na losowych wektorach systemowych. Model ten stwarza także przesłanki na jego zastosowanie w systemach łączności wykorzystujących technologię MIMO.

**Autorzy:** dr inż. Wiesław Citko, Uniwersytet Morski Gdynia, Wydział Elektryczny, ul. Morska 81-87, 81-225 Gdynia, E-mail: [w.citko@we.umg.edu.pl](mailto:w.citko@we.umg.edu.pl); dr hab. inż. Wiesław Sienko, Uniwersytet Morski Gdynia, Wydział Elektryczny, ul. Morska 81-87, 81-225 Gdynia, E-mail: [w.sienko@we.umg.edu.pl](mailto:w.sienko@we.umg.edu.pl).

#### LITERATURA

- [1] Pal S.K., Ghosh A., Kundu M.K. (Eds.), *Soft Computing for Image Processing*, In *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Physica-Verlag Heidelberg (2000), New York, NY, USA.
- [2] Huang Z., Ye S., McCann M.T., Ravishankar S., *Model-based Reconstruction with Learning: From Unsupervised to Supervised and Beyond*, *arXiv* (2021), arXiv:2103.14528v1.
- [3] Kaderuppan S. S., Wong W.W.L., Sharma A., Woo W.L., *Smart Nanoscopy: A Review of Computational Approaches to Achieve Super-Resolved Optical Microscopy*, *IEEE Access* (2020), no. 8, 214801–214831.
- [4] Ramanarayanan S., Murugesan B., Ram K., Sivaprakasam M., *DC-WCNN: A Deep Cascade of Wavelet Based Convolutional Neural Networks for MR Image Reconstruction*, In *Proceedings of the IEEE 17th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI)*, Iowa City, IA, USA, 3–7 April 2020.
- [5] Fessler A.J., *Optimization Methods for Magnetic Resonance Image Reconstruction: Key Models and Optimization Algorithms*, *IEEE Signal Process. Mag.*, 37 (2020), 33–40.
- [6] Zheng H., Sherazi S.W.A., Son S.H., Lee J.Y., *A Deep Convolutional Neural Network-Based Multi-Class Image Classification for Automatic Wafer Map Failure Recognition in Semiconductor Manufacturing*, *Appl. Sci.*, 11 (2021), 9769.
- [7] Szhou S.K., Greenspan H., Davatzikos C., Duncan J.S., Ginneken B., Madabhushi A., Prince J.L., Rueckert D., Summers R.M., *A Review of Deep Learning in Medical Imaging: Imaging Traits, Technology Trends, Case Studies with Progress Highlights, and Future Promise* *Proc. IEEE*, 109 (2021), 820–838.
- [8] Quan T.M., Nguyen-Duc T., Jeong W.K., *Compressed Sensing MRI Reconstruction Using a Generative Adversarial Network with a Cyclic Loss*. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 37 (2018), 1488–1497.
- [9] Mardani M., Gong E., Cheng J.Y., Vasanawala S.S., Zaharchuk G., Xing L., Pauly J.M., *Deep Generative Adversarial Neural Networks for compressive sensing MRI*, *IEEE Trans. Med. Imaging*, 38 (2019), 167–179.
- [10] Liang D., Cheng J., Ke Z., Ying L., *Deep Magnetic Resonance Image Reconstruction: Inverse Problems Meet Neural Networks*. *IEEE Signal Process. Mag.*, 37 (2020), 141–151.
- [11] Citko W., Sienko W., *Hamiltonian and Q-Inspired Neural Network-Based Machine Learning*, *IEEE Access*, (2020), no. 8, 220437–220449.
- [12] Citko W., Sienko W., *Inpainted Image Reconstruction Using an Extended Hopfield Neural Network Based Machine Learning System*, *Sensors*, 22 (2022), no. 3.
- [13] Citko W., Trzebiatowski A., Sienko W., *Rekonstrukcja zdjęć twarzy z wykorzystaniem systemu uczenia maszynowego*, *Przegląd Elektrotechniczny*, 97 (2021), nr.12, 191-194.
- [14] Gilton D., Ongie G., Willett R., *Deep Equilibrium Architectures for Inverse Problems in Imaging*. *arXiv* (2021), arXiv:2102.07944v2.
- [15] Arridge S., Maass P., Oktem O., Schonlieb C., *Solving Inverse Problems using Data-driven Models*, *Acta Numer.*, 28, (2019), 1–174.
- [16] Ongie G., Jalal A., Metzler C.A., Baraniuk R.G., Dimakis A.G., Willett R., *Deep Learning Techniques for Inverse Problems in Imaging*, *arXiv* (2020), arXiv:205.06001.