

Zastosowanie metody redukcyjnej arytmetyki interwałowej do bieżącej oceny właściwości metrologicznych toru pomiarowego

Streszczenie. Artykuł poświęcono problemowi wyznaczania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej w przypadku analizy obejmującej występowanie wielu źródeł błędów. Zastosowana w tym celu metoda redukcyjnej arytmetyki interwałowej jest gruntownie opisana w literaturze i wykorzystywana, przy czym w artykule zaproponowano pewną aplikację tej metody. Zaproponowany algorytm umożliwia oszacowanie wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej, redukując stopień skomplikowania i złożoność procesu obliczeń. Weryfikacja poprawności przedstawionych zależności wykonana została eksperymentalnie, wykorzystując symulacje metodą Monte-Carlo, której celem było określenie dokładności proponowanej metody w typowej jej aplikacji.

Abstract. The article discusses the problem of determining the resultant value of expanded uncertainty in an analysis involving multiple error sources. It describes the method of reductive interval arithmetic, which is presented in the literature and used for this purpose. The article proposes a specific application of this method that allows for estimating the calculation result while reducing the complexity of the calculation process. To verify the accuracy of the presented dependencies, experimental verification was conducted using Monte-Carlo simulations. The purpose of these simulations was to determine the accuracy of the proposed method in typical applications. (**Application of the reductive interval arithmetic to current evaluation of the measurement path metrological properties**)

Słowa kluczowe: ocena niedokładności wyniku pomiaru, wyznaczanie wartości niepewności rozszerzonej, redukcyjna arytmetyka interwałowa
Keywords: assessment of measurement result inaccuracy, determination of expanded uncertainty, reductive interval arithmetic

Wstęp

Ilościowy opis niedokładności wyniku pomiaru bazuje zwykle na pojęciu niepewności, przy czym wyróżnia się pojęcia niepewności standardowej oraz rozszerzonej [1]. Wyznaczanie wartości niepewności standardowej jest procesem gruntownie opisanym w instrukcji JGCM [1], natomiast miara ta nie pozwala na określenie w jakim przedziale z określonym prawdopodobieństwem znajdują się prawidłowe wartości wielkości mierzonej. Informacje te są dostępne w przypadku niepewności rozszerzonej, a zatem wielkość ta jest bardzo dobrą miarą niedokładności wyznaczania wartości wielkości wyjściowej dla analizowanego toru pomiarowego. Podczas wyznaczania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej, w przypadku istnienia wielu wielkości zakłócających proces pomiaru, istotny problem stanowi stopień skomplikowania obliczeń, wynikający z konieczności splatania funkcji gęstości prawdopodobieństwa analizowanych sygnałów [2].

Ocena właściwości metrologicznych toru pomiarowego odbywa się w większości wypadków na etapie projektowania tego toru. W tym celu tworzony jest model błędu oraz identyfikowane są jego parametry odpowiadające kolejnym sygnałom mającym wpływ na wynik procesu pomiaru [3]. W omawianym przypadku najbardziej uniwersalną metodą oceny wartości niepewności rozszerzonej dla wielkości wyjściowej obiektu jest wykonanie symulacji metodą Monte-Carlo [4]. Alternatywę stanowią metody analityczne, takie jak metoda rozszerzonej propagacji niepewności [5], metoda propagacji dystrybuant [6], czy metoda bazująca na logice rozmytej [7]. Wymienione metody posiadają bardzo szerokie zastosowanie, natomiast ich aplikacja wymaga gruntownej wiedzy ze strony projektanta toru pomiarowego odnośnie sposobu wykorzystania tych metod.

Zarówno na etapie projektowania toru pomiarowego, jak i w czasie jego pracy, liczba sygnałów zakłócających proces pomiaru oraz parametry tych sygnałów mogą ulec zmianie. W przypadku metody Monte-Carlo implikuje to konieczność wykonania ponownej symulacji dla nowego zestawu parametrów. Metody analityczne pozwalają natomiast na sformułowanie odpowiednich zależności, na podstawie których wyznaczyć można nową wartość niepewności rozszerzonej, natomiast wyprowadzenie tych zależności może być procesem skomplikowanym.

Jeżeli w analizowanym przypadku spełnione będą założenia centralnego twierdzenia granicznego, tj. obecnych będzie wiele nieskorelowanych sygnałów błędów o podobnych wartościach niepewności standardowej, to obliczenia można uprościć wyznaczając wartość niepewności standardowej, a następnie zgodnie z [1] wartość niepewności rozszerzonej wyznaczyć można stosując odpowiedni współczynnik rozszerzenia. Okoliczność ta nie zawsze jest dostępna, a przyjęcie niewłaściwych założeń prowadzi do znacznych rozbieżności pomiędzy rzeczywistością, a wyznaczoną wartością niepewności rozszerzonej.

Powyższe informacje pozwalają określić najważniejsze wymagania stawiane metodzie stosowanej w celu określania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej:

- niski stopień skomplikowania obliczeń i przygotowania potrzebnych danych,
- możliwość aplikacji metody w czasie pracy systemu pomiarowego,
- możliwość zmiany liczby oraz parametrów analizowanych sygnałów błędów,
- uzyskiwane wyniki powinny być zbliżone do tych uzyskiwanych symulacyjnie lub analitycznie.

Opisywane cechy jest w stanie zapewnić metoda redukcyjnej arytmetyki interwałowej, opisana w pracy [8], bazująca na metodzie opisanej w [9] i umożliwiająca zawężenie wynikowego interwału. Spełnienie stawianych jej wymagań jest możliwe w wyniku zastosowania odpowiedniego algorytmu, przedstawionego w dalszej części artykułu.

Metoda redukcyjnej arytmetyki interwałowej

Metoda redukcyjnej arytmetyki interwałowej bazuje na operacji sumowania interwałów. W kontekście niepewności rozszerzonej analizowane interwały stanowią przedziały, w jakich znajdować się mogą wartości realizacji sygnału błędu analizowanych wielkości. Zakładając zerową wartość oczekiwaną realizacji sygnału błędu oraz symetryczny względem osi rzędnych kształt funkcji gęstości prawdopodobieństwa tych sygnałów analizowane interwały są interwałami nieobciążonymi, definiowanymi przez ich promień, który w analizowanym przypadku równy jest wartości niepewności rozszerzonej związanej z analizowanym interwałem [8].

Jako, że opisane założenie jest w większości przypadków spełnione, dalsza część artykułu została

poświęcona analizie uwzględniającej to założenie. W przypadku gdy któryś z interwałów jest obciążony, tj. występuje niezerowa wartość oczekiwana sygnału błędu, należy uwzględnić korektę z nią związaną. W przypadku, gdy analizowany sygnał błędu cechuje się niesymetryczną funkcją gęstości prawdopodobieństwa, należy osobno analizować ujemną i dodatnią część wypadkowego interwału, przy czym taka sytuacja odbiega od klasycznej definicji niepewności rozszerzonej i nie została przedstawiona w artykule.

W dalszej części artykułu przyjmuje się, że sygnał związany z wielkością wyjściową $y(t)$ analizowanego toru pomiarowego jest opisany w postaci:

$$(1) \quad \tilde{y}(t) = \dot{y}(t) + e_1(t) + \dots + e_N(t),$$

gdzie symbolem $\tilde{y}(t)$ oznaczono przebieg tej wielkości zakłócony przez N addytywnych sygnałów błędów $e_i(t)$ oraz $\dot{y}(t)$ jest idealnym przebiegiem czasowym tej wielkości. Przyjmując, że z każdym sygnałem błędu $e_i(t)$ związana jest niepewność rozszerzona U_i oraz że dla każdego sygnału jej wartość wyznaczana jest dla jednakowego poziomu ufności α , zapisać można [8]:

$$(2) \quad U_\Sigma = \sqrt{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & h_{1,2} & \dots & h_{1,N} \\ h_{2,1} & 1 & & h_{2,N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}}.$$

gdzie symbolem $h_{i,j}$ oznaczono współczynnik macierzy koherencji dla pary sygnałów $e_i(t)$ oraz $e_j(t)$, przy czym $h_{i,j} = h_{j,i}$ oraz $h_{i,j} = 1$ dla $i = j$.

Analizując treść równania (2) zauważyć można, że wyznaczenie wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej wymaga znajomości wartości niepewności rozszerzonych związanych z sygnałami błędów $e_i(t)$ oraz znajomości wartości współczynników $h_{i,j}$ macierzy koherencji dla analizowanych par sygnałów.

Szacowanie wartości współczynników koherencji

Przypadek szczególny równania (2) dotyczy sytuacji, w której występują jedynie dwa sygnały błędów $e_a(t)$ oraz $e_b(t)$. Rozważając analizowany przypadek zapisać można:

$$(3) \quad U_{a,b} = \sqrt{\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & h_{a,b} \\ h_{a,b} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}} = \sqrt{U_a^2 + U_b^2 + 2U_a U_b h_{a,b}}.$$

natomiast przekształcając powyższe równanie określić można wartość współczynnika koherencji $h_{a,b}$ jako:

$$(4) \quad h_{a,b} = h_{b,a} = \frac{U_{a,b}^2 - U_a^2 - U_b^2}{2U_a U_b}.$$

Wartość współczynnika koherencji stanowi wypadkową kształtu rozkładu wynikowego splatanych sygnałów oraz ich korelacji [8]. Współczynnik ten przyjmuje wartości z zakresu $< -1; 1 >$, przy czym wartość ta dąży do zera jeżeli kształt rozkładu wypadkowego sygnału jest zbliżony do rozkładu normalnego. Dodatkowo, dla pełnej dodatniej korelacji analizowanych sygnałów wartość współczynnika koherencji wynosi 1 oraz -1 dla pełnej ujemnej korelacji [10].

Wobec powyższych, jeżeli znana jest wypadkowa wartość niepewności rozszerzonej $U_{a,b}$ możliwe jest wyznaczenie wartości współczynnika koherencji $h_{a,b}$.

Naturalnie, zabieg ten nie stanowi celu przeprowadzanej analizy metrologicznej. Wartości współczynników macierzy koherencji mogą być wyznaczane na wiele sposobów. Pierwszym z nich jest zastosowanie metody analitycznej, opisaną w [8]. Metoda ta bazuje na operacji splotu, a jej stopień skomplikowania rośnie drastycznie wraz z liczbą analizowanych sygnałów błędów. Innym podejściem jest wykorzystanie metody Monte-Carlo, opisaną w [11]. Należy podkreślić, że wyznaczone wartości współczynników koherencji dotyczą unikatowego zestawu danych, dla których zostały one wyznaczone. Zmiana kształtu rozkładów analizowanych sygnałów, liczby sygnałów lub stosunku mocy tych sygnałów oznacza konieczność ponownego wyznaczenia wartości współczynników koherencji. Z punktu widzenia założeń opisanych we wstępie metody te nie znajdują bezpośredniego zastosowania. Jako, że wyznaczenie dokładnej wartości współczynników koherencji nie jest możliwe dla przedstawionych we wstępie wymagań, proponuje się algorytm umożliwiający oszacowanie ich wartości. Dokładność tego oszacowania będzie miała istotny wpływ na dokładność uzyskiwanych wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej.

Zgodnie z propozycją zawartą w [11] istnieje możliwość wyznaczenia zgodnie z zależnością:

$$(5) \quad s_{a,b} = s_{b,a} = \frac{U_{a,b}^2 - U_a^2 - U_b^2}{2U_a U_b} = \frac{U^2}{2U_{a,b}} - 1.$$

wartości współczynnika kształtu $s_{a,b}$ dla pary sygnałów $e_a(t)$ oraz $e_b(t)$ przy założeniu jednakowej wartości niepewności rozszerzonych $U = U_a = U_b$. Można zauważyć, że wartość współczynnika kształtu może być wyznaczona symulacyjnie, przy czym operacja ta jest jednorazowa dla każdej z par sygnałów o danym kształcie funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Wyznaczone metodą Monte-Carlo wartości współczynników kształtu dla typowych par rozkładów przedstawiono w tabeli 1, przy czym przyjęto poziom ufności $\alpha = 95\%$. Należy następnie określić, w jakim stopniu zmienia się wartość tego współczynnika w przypadku zmiany liczby analizowanych sygnałów oraz zmiany mocy tych sygnałów.

Tabela 1. Zestawienie wartości współczynnika kształtu dla par sygnałów o typowych funkcjach gęstości prawdopodobieństwa, gdzie kolejne symbole oznaczają rozkład: (n) normalny, (u) jednostajny, (t) trójkątny, (d) funkcji sinus

$s_{a,b}$	n	u	t	d
n	0.0000	0.1561	0.0250	0.2988
u	0.1561	0.3356	0.1773	0.5337
t	0.0250	0.1773	0.0419	0.3504
d	0.2988	0.5337	0.3504	0.7136

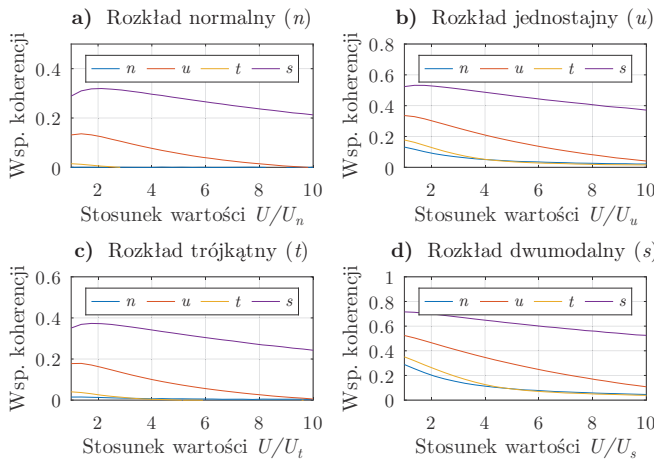
Zgodnie z treścią centralnego twierdzenia granicznego, wraz ze wzrostem liczby sumowanych sygnałów błędów, kształt rozkładu wypadkowego sygnału błędu powinien dążyć do kształtu rozkładu normalnego, w przypadku gdy sygnały te cechują się podobnymi wartościami mocy oraz nie są ze sobą skorelowane. Z punktu widzenia równania (2) oznacza to, że wraz ze wzrostem liczby nieskorelowanych sygnałów o podobnej mocy, wartości współczynników koherencji powinny dążyć do zera. W pracy [11] zaproponowano oznaczoną symbolem $k_{i,j}$ korektę wartości współczynników kształtu wyznaczanych zgodnie z równaniem (5), obejmującą przedstawione założenia:

$$(6) \quad k_{i,j} = k_{j,i} = \frac{U_i^2 + U_j^2}{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^2}.$$

Nieporuszanym dotąd w literaturze zagadnieniem jest wpływ stosunku mocy analizowanych sygnałów na wartości współczynników koherencji. Przeprowadzone badania symulacyjne wykazały, że wraz ze wzrostem dysproporcji pomiędzy mocą analizowanych sygnałów wartość współczynnika koherencji maleje, co przedstawiono na rysunku 1. Proponuje się zatem korektę oznaczoną symbolem $p_{a,b}$, wynikającą z opisanego zjawiska w postaci:

$$(7) \quad p_{a,b} = p_{b,a} = \sqrt{\frac{\min(U_a, U_b)}{\max(U_a, U_b)}}.$$

przy czym należy zauważyć, że opisywana zależność stanowi jedynie przybliżenie charakteru tego zjawiska.

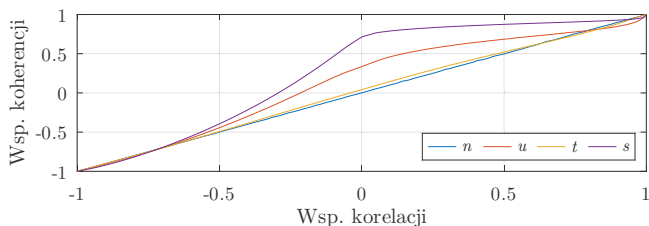


Rys. 1. Zależność wartości współczynnika koherencji w funkcji stosunku mocy analizowanych par sygnałów o rozkładzie (n) normalnym, (u) jednostajnym, (t) trójkątnym, (d) funkcji sinus

Oszacowanie wartości współczynnika koherencji może zatem odbywać się wykorzystując wartość współczynnika kształtu, wyznaczaną zgodnie z równaniem (5), oraz współczynników korekcji danych w równaniach (6), (7):

$$(8) \quad h_{i,j} = h_{j,i} = s_{i,j} \cdot p_{i,j} \cdot k_{i,j} = s_{i,j} \sqrt{\frac{\min(U_i, U_j)}{\max(U_i, U_j)}} \left(\frac{U_i^2 + U_j^2}{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^2} \right).$$

Ostatnim wymagającym poruszenia zagadnieniem jest przypadek, w którym analizowane sygnały są ze sobą skorelowane. Przeprowadzone badania symulacyjne wykazały istotną zależność wartości współczynnika koherencji w funkcji współczynnika korelacji Pearsona, co przedstawiono na rysunku 2. Analizowana charakterystyka jest silnie nieliniowa, przez co nie ma możliwości wyznaczenia podobnego do zaproponowanego w równaniu (7) współczynnika korekcji.



Rys. 2. Zależność wartości współczynnika koherencji w funkcji wartości współczynnika korelacji Pearsona analizowanych par sygnałów o rozkładzie (n) normalnym, (u) jednostajnym, (t) trójkątnym, (d) funkcji sinus

Aplikacja proponowanej metody wymagać będzie zatem określenia wartości współczynników kształtu dla typowych par rozkładów, które następnie będą korygowane w czasie rzeczywistym na podstawie bieżących parametrów i liczby analizowanych sygnałów błędów. Analizując dotychczasowe założenia oraz przedstawione wyniki eksperymentów zauważyć można, że bezpośrednio zastosowanie proponowanej w równaniu (8) metody szacowania wartości współczynników koherencji nie jest możliwe w przypadku korelacji dowolnej pary analizowanych sygnałów. W takim przypadku proponuje się wyznaczenie parametrów wypadkowych grup skorelowanych sygnałów inną metodą, lub wykorzystanie metody umożliwiającej określenie wartości współczynników koherencji dla skorelowanych sygnałów, opisaną w [10].

Weryfikacja skuteczności proponowanej metody

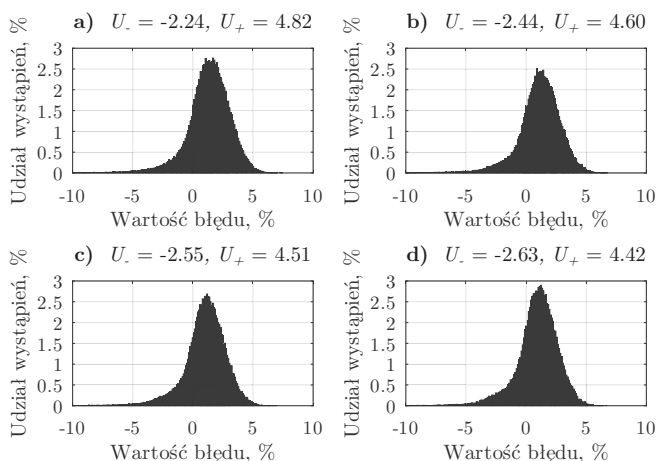
Aby zweryfikować poprawność proponowanej metody szacowania wartości współczynników koherencji oraz związaną z nią niedokładność wyznaczania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej, przeprowadzono eksperyment metodą Monte-Carlo. Każda iteracja eksperymentu obejmowała:

- wylosowanie liczby analizowanych sygnałów błędów $e_1(k), \dots, e_N(k)$, gdzie $N \in \langle 3; 9 \rangle$;
- wylosowanie kształtu c_i funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla każdego z sygnałów, gdzie losowano z puli rozkładów normalnego, jednostajnego, trójkątnego oraz dwumodalnego (rozkładu funkcji sinus);
- wylosowanie wartości niepewności rozszerzonej dla każdego z sygnałów, gdzie $U_i \in \langle 1; U_{max} \rangle$ dla poziomu ufności $\alpha = 95\%$;
- wygenerowanie stu tysięcy wartości realizacji dla N sygnałów $e_1(k), \dots, e_N(k)$ o zadanych parametrach U_1, \dots, U_N i kształtach rozkładów c_1, \dots, c_N ;
- wyznaczenie szacowanej wartości niepewności rozszerzonej U_c zgodnie z zależnością (2) dla wartości współczynników koherencji odpowiadających wylosowanym parametrom sygnału, zgodnie z zależnością (8);
- wyznaczenie realizacji sygnału $e_{\Sigma}(k) = \sum_{i=1}^N e_i(k)$;
- wyznaczenie na podstawie wektora realizacji sygnału $e_{\Sigma}(k)$ wartości niepewności rozszerzonej U_s dla poziomu ufności $\alpha = 95\%$;
- wyznaczenie względnego błędu oszacowania wartości niepewności $\delta_U = \frac{U_c - U_s}{U_s} 100\%$;

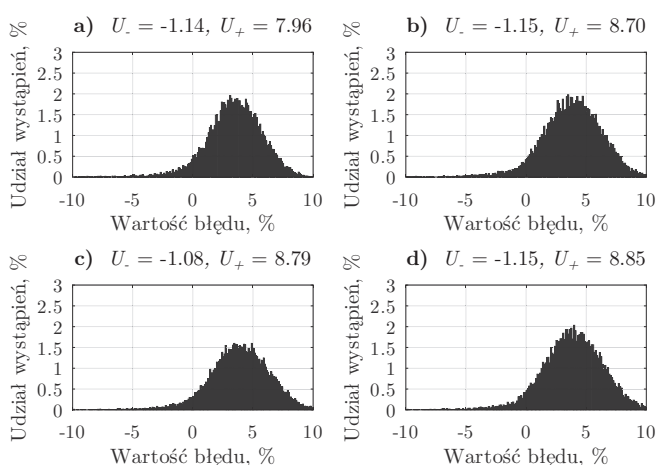
przy czym każdorazowo losując daną realizację wybranego parametru uzyskanie każdej możliwej realizacji tego parametru było jednakowo prawdopodobne. Przedstawiony eksperyment powtórzono sto tysięcy razy, a następnie dla uzyskanych realizacji względnego błędu oszacowania wartości niepewności rozszerzonej δ_U wyznaczono niepewność oszacowania tego parametru. Eksperyment wykonano wielokrotnie – dla współczynników koherencji wyznaczanych zgodnie z równaniem (8) oraz z pominięciem zaproponowanej korekty, opisaną równaniem (7), a także dla różnych wartości U_{max} . Uzyskane histogramy wartości realizacji wielkości δ_U przedstawiono na rysunkach 3 oraz 4. W tabeli 2 zestawiono podsumowanie eksperymentu wraz ze wskazaniem wartości parametru U_{max} .

Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów zauważyć można, że zaproponowana w równaniu (7)



Rys. 3. Wartości realizacji wielkości δ_U dla współczynników koherencji szacowanych z uwzględnieniem zaproponowanej korekty



Rys. 4. Wartości realizacji wielkości δ_U dla współczynników koherencji szacowanych bez uwzględnienia zaproponowanej korekty

Tabela 2. Zestawienie wartości niepewności względnego błędu szacowania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej (1) z wykorzystaniem zaproponowanej korekty, (2) bez zaproponowanej korekty

U_i	a) $\langle 1; 3 \rangle$		b) $\langle 1; 6 \rangle$		c) $\langle 1; 10 \rangle$		d) $\langle 1; 20 \rangle$	
δ_U	U_-	U_+	U_-	U_+	U_-	U_+	U_-	U_+
1)	-2.23	+4.83	-2.43	+4.59	-2.54	+4.52	-2.62	+4.45
2)	-1.14	+7.96	-1.13	+8.69	-1.09	+8.80	-1.13	+8.86

korekta jest zasadna, a jej stosowanie pozwala uzyskiwać wyniki znacznie bardziej zbliżone do tych uzyskiwanych symulacyjnie. Jak opisano w publikacjach [11, 12] stosowanie metody redukcyjnej arytmetyki interwałowej jest możliwe w celu oszacowania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej, przy czym metoda ta dostarcza wyników zawyżonych nawet o około 10% w stosunku do wartości rzeczywistych. Wprowadzenie zaproponowanej korekty zmniejsza niedokładność omawianej metody, przy czym 95% uzyskanych dla wielkości δ_U wyników mieściło się w przedziale $\delta_U \in \langle -3; 5 \rangle$ %. Jako, że w praktyce pomiarowej nie konieczne jest tak bardzo dokładne oszacowanie wartości niepewności rozszerzonej, można te wyniki uznać za zadowalające.

Wadą przedstawionej metody jest problem analizy dla skorelowanych sygnałów błędów. W przypadku pełnej korelacji analizę tą można wykonać wyznaczając wypadkową wartość niepewności rozszerzonej dla skorelowanej grupy sygnałów, a następnie kontynuować można analizę

zastępując w wektorze niepewności analizowane sygnały jedną wypadkową wielkością. Innym rozwiązaniem jest również wyznaczenie wartości współczynników koherencji zgodnie z metodą proponowaną w [10].

Kolejną wadą metody jest konieczność wstępnego wyznaczenia wartości współczynników kształtu dla par analizowanych rozkładów. Mimo, że operacja ta nie jest skomplikowana, to wymaga od projektanta toru pomiarowego wiedzy na temat możliwych kształtów funkcji gęstości prawdopodobieństwa analizowanych sygnałów. W przypadku, gdy analizowane są sygnały o niestandardowym kształcie, istnieje możliwość wyznaczenia wartości współczynników kształtu symulacyjnie, zgodnie z metodą opisaną równaniem (5). Istnieje możliwość wykonania tej czynności również w przypadku, gdy dysponuje się jedynie wektorem wielu realizacji analizowanego sygnału błędu.

Analizując treść równań (2) oraz (8) zauważyć można, że w przypadku zmiany wartości parametrów analizowanych sygnałów oraz zmiany liczby tych sygnałów, nie są konieczne żadne skomplikowane czynności w celu wyznaczenia nowej wartości współczynników koherencji oraz oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej. Przedstawione równania mogą być z łatwością zaimplementowane stosując współczesne mikrokontrolery, a ich niska złożoność obliczeniowa umożliwia wyznaczenie ich wartości w czasie rzeczywistym.

Autorzy: mgr inż. Łukasz Drózdź, dr hab. inż. Jerzy Roj prof. PS, Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki, Wydział Elektryczny, Politechnika Śląska, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, email: lukasz.drozd@polsl.pl, jerzy.roj@polsl.pl

LITERATURA

- [1] Joint Committee for Guides in Metrology: Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, JCGM, 2008.
- [2] Grimmer, G. and Stirzaker, D.: Probability and Random Processes, Oxford University Press, 2020.
- [3] Jakubiec, J.: Model niepewności jako podstawa oceny dokładności algorytmów przetwarzania pomiarowego, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Elektryka, Z. 169, s. 7–36, 2000.
- [4] Joint Committee for Guides in Metrology: Evaluation of measurement data – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM, 2008.
- [5] Dieck, R. H.: Measurement uncertainty: methods and applications, ISA, 2007.
- [6] Koliander, G. and El-Laham, Y. and Djurić, P. M. and Hlawatsch, F.: Fusion of probability density functions, Proceedings of the IEEE, vol. 110, no. 4, p. 404–453, 2022.
- [7] Urbanski, M. K. and Wąsowski, J.: Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness, Measurement, vol. 34, no. 1, p. 67–74, 2003.
- [8] Jakubiec, J.: Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2002.
- [9] Moore, R. E.: Interval analysis, Prentice Hall, 1966.
- [10] Jakubiec, J.: Reductive interval arithmetic application to uncertainty calculation of measurement result burdened correlated errors, Metrology and Measurement Systems, vol. 10, no. 2, p. 137–156, 2003.
- [11] Jakubiec, J.: Błędy i niepewności danych w systemie pomiarowo-sterującym, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2010.
- [12] Batko, W. and Pawlik, P.: Uncertainty evaluation in modelling of acoustic phenomena with uncertain parameters using interval arithmetic, Acta Physica Polonica A, vol. 121, no. 1A, 2012.