

80 lat Metody Elementów Skończonych

Streszczenie. W artykule przedstawiono rozwój metody elementów skończonych od pierwszych sformułowań metody po jej współczesne zastosowanie. W związku z 80 rocznicą pierwszego matematycznego opisu metody, przybliżono sylwetki badaczy mających największy wpływ na jej rozwój. Szczególną uwagę zwrócono na jej wykorzystanie w elektromagnetyzmie obliczeniowym. Zaakcentowano osiągnięcia polskich naukowców w tej dziedzinie.

Abstract. The article presents the development of the finite element method from the first formulations of the method to its modern application. In connection with the 80th anniversary of the first mathematical description of the method, the profiles of the researchers who had the greatest influence on its development are introduced. Particular attention was paid to its use in computational electromagnetism. Polish achievements in this field were emphasized. (**80 Years of the Finite Element Method**).

Słowa kluczowe: elektromagnetyzm obliczeniowy, historia elektromagnetyzmu, metoda elementów skończonych, pole elektromagnetyczne

Keywords: computational electromagnetism, history of electromagnetism, finite element method, electromagnetic field.

Wstęp

Rozwiązywanie podstawowych równań fizyki, wyrażonych w formie różniczkowej, było podstawowym narzędziem zdobywania wiedzy na temat zjawisk fizycznych. Metody rozwiązywania tych równań ewoluowały od metod matematycznych poprzez metody modelowania analogowego do metod modelowania numerycznego. Jedną z najważniejszych metod w obszarze modelowania numerycznego stała się metoda elementów skończonych (MES). Poprzedzająca ją metoda różnic skończonych (MRS) nie była skuteczną odpowiedzią na wyzwanie, jakie przyniósł rozwój technologii. Metoda elementów skończonych wprowadzała do metodyki modelowania numerycznego nową koncepcję. Mianowicie, zamiast aproksymacji operatora różniczkowego wprowadzono aproksymację funkcji. Trzeba jednak zauważyć, że MES i MRS prowadzą do takiego samego zadania algebraicznego w przypadku prostych problemów [1]. Takie podejście zrewolucjonizowało sposób modelowania matematycznego w analizie problemów naukowych i inżynierskich. Większe możliwości, zarówno w aspekcie opisu obiektu analizy, jak i sposobu aproksymacji spowodowały, że MES umożliwia analizę problemów fizycznych i inżynierskich, do tej pory rozwiązywanych przy użyciu kosztownych eksperymentów lub mało dokładnych metod modelowania analogowego. Podstawą matematyczną MES są metody wariacyjne, występujące w analizie matematycznej pod nazwami metody Galerkina, i metody Rayleigha-Ritza [2]. MES usunęła większość ograniczeń metody różnic skończonych, takich jak brak elastyczności w opisie nieregularnych granic, nieefektywne siatkowanie oparte na regularnych siatkach oraz potrzebę specjalnych technik radzenia sobie z warunkami materiałowymi. Jednak leżąca u jej podstaw matematyka była znacznie bardziej wymagająca, a koncepcje fizyczne trudniejsze (metody wariacyjne, analiza funkcjonalna, techniki interpolacji). W ten sposób nacisk został przesunięty z prostej koncepcji, ale nieefektywnej implementacji w kierunku łatwego w użyciu systemu opartego na bardziej wyrafinowanym sformułowaniu. W zadaniu dwuwymiarowym MES opiera się na dyskretyzacji obszaru zbiorem trójkątów (elementów skończonych) i przyjmowaniu dwuliniowej aproksymacji szukanej funkcji w każdym trójkącie. W zadaniu trójwymiarowym obiekt przestrzenny dzielimy na elementy czworościenne (tetrahedrony). Parametrów funkcji aproksymujących poszukuje się poprzez minimalizację

funkcjonału, którego zmienną jest kwadrat funkcji szukanej [3].

W roku 2023 przypadła osiemdziesiąta rocznica pierwszego opisu koncepcji rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, która stała się podstawą do sformułowania metody elementów skończonych. W roku 1943 w Bulletin of the American Mathematical Society został opublikowany przez Richarda Couranta artykuł prezentujący wspomnianą koncepcję [4]. Autor tego artykułu urodził się w Lublińcu, w tamtym czasie w niemieckim mieście Lublinitz, w żydowskiej rodzinie Courantów. Prace naukowe w dziedzinie matematyki i jej zastosowań w fizyce prowadził początkowo w Getyndze, u boku Dawida Hilberta, światowej sławy matematyka, a potem, zmuszony atmosferą nazistowskich Niemiec do emigracji, pracował w USA w utworzonym przez siebie centrum naukowo-edukacyjnym, obecnie znanym pod nazwą Courant Institute of Mathematical Sciences [5].

Rozwój metody

Choć już w jednej z prac Kircha w 1868 pojawiła się sugestia, zakładająca podział analizowanego obiektu na określoną liczbę prymitywów geometrycznych, to właśnie wspomniana wyżej praca Couranta, oparta na rachunku wariacyjnym, w której użył elementów trójkątnych i minimalizacji funkcjonalu, uznana została za pierwszy opis metody [6]. Podobne prace dotyczące dyskretyzacji i sformułowań wariacyjnych były również w tym czasie zgłaszane między innymi przez McHenry'ego, Pragera i Synge'a oraz Synge'a i Rheinboldta [6]. Na początku badania dotyczyły tylko prostych przypadków jednowymiarowych, dających się opisać za pomocą równań liniowych. Sama nazwa metody ma swój początek w pracy z 1960 roku, gdzie autorzy Turner, Clough, Martin i Topp, skończony fragment ustroju nazwali elementem skończonym [7]. Nazwa ta idealnie oddawała istotę metody i została bardzo szybko uznana przez środowisko naukowe. MES stała się obiektem zainteresowania badawczego na świecie, w latach 60-tych XX wieku wiele ośrodków naukowych koncentrowało się na jej rozwoju. Kang Feng z Chińskiej Akademii Nauk, J.H. Argyris na Uniwersytecie w Stuttgarcie; R. Clough i współpracownicy tacy jak E. L. Wilson i R.L. Taylor na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley; P. G. Ciarlet na Uniwersytecie Paris XI; R. Gallager na Cornell University, R. Melosh w Philco Corporation, B. Fraeijs de Veubeke na Université de Liège

to tylko część nazwisk, które należy wymienić, chcąc wskazać osoby mające znaczący wkład w rozwój MES [6].

Metody wariacyjne i pomysły na zastosowanie w rozwiązywaniu równań różniczkowych i całkowych prostych tworów geometrycznych (*simplex*) pojawiały się w literaturze matematycznej, ale sama metoda elementów skończonych zyskała popularność od czasu jej zastosowania w rozwiązywaniu zadań inżynierskich. Prekursorami zastosowania metody byli badacze w dziedzinie mechaniki. W historii MES zapisał się Olgierd Zienkiewicz, profesor Uniwersytetu Walijskiego w Swensea, pochodzący z rodziny polsko-brytyjskiej. Olgierd Zienkiewicz był członkiem zagranicznym Polskiej Akademii Nauk, oraz doktorem honoris causa Politechniki Śląskiej, Politechniki Warszawskiej, Politechniki Częstochowskiej i Politechniki Krakowskiej. Był autorem pierwszych prac na temat zastosowania MES w analizie naprężeń mechanicznych [8]. O stopniu zainteresowania współczesnych badaczy MES może świadczyć liczba prac opublikowanych na jej temat- do 1965 było ich ponad 1000 [6]. Jednym z większych trudności, na jakie napotykała MES w latach 60-tych były moce obliczeniowe ówczesnych komputerów. Pomimo ograniczeń sprzętowych tworzone były pakiety ogólnego przeznaczenia, co popularyzowało MES w ośrodkach badawczych i akademickich w całym świecie. Jednym z pierwszych pakietów oprogramowania był utworzony 15 lat po publikacji Couranta pakiet typu *finite element open-source*. Natomiast Oden i Best napisali jeden z pierwszych kodów komputerowych MES ogólnego przeznaczenia, który był używany przez wiele lat w projektowaniu, m.in. samolotów. Do lat osiemdziesiątych najbardziej zaawansowane modele zajmowały się w dalszym ciągu prostymi geometriami jedno- i dwuwymiarowymi i dopiero wzrost mocy obliczeniowej komputerów pozwolił na modelowanie obiektów trójwymiarowych. Rozwój MES przebiegał równoległe z rozwojem komputerów i wynikał głównie z potrzeby analizy coraz bardziej złożonych konstrukcji. Lata 80-te to czas, gdy na rynku pojawiło się wiele komercyjnych systemów MES, np. NASTRAN. Prace z dziedziny zastosowania MES w mechanice obliczeniowej zdominowały na pewien okres obszar badawczy. W tym obszarze badawczym znalazła się też grupa polskich badaczy, skupiona wokół prof. Jana Szmeltera z Politechniki Łódzkiej, a później z Wojskowej Akademii Technicznej [9]. Stworzyli jeden z pierwszych systemów obliczeniowych MES, który funkcjonował pod nazwą WAT-KM. Lata 90. to czas tworzenia zintegrowanych systemów CAD oraz CAE, umożliwiającą dwustronną wymianę danych [7].

MES w analizie pola elektromagnetycznego

Równania różniczkowe cząstkowe stanowią fundament opisu matematycznego pola elektromagnetycznego, nie jest więc niczym dziwnym, że badacze, zajmujący się tzw. elektromagnetyzmem obliczeniowym, zainteresowali się dynamicznie rozwijającą się metodą i dokonali jej szybkiej implementacji w swoim obszarze badawczym. W latach osiemdziesiątych XX wieku powstała grupa badaczy, implantująca MES do obliczeń pola elektromagnetycznego (PEM) w urządzeniach elektrycznych. Grupę tę tworzyli badacze z wielu krajów świata, ale niewątpliwie prekursorem zastosowania MES w analizie zagadnień elektromagnetycznych był Peter P. Silvester (McGill University, Kanada) [10]. Wprowadził metodę elementów skończonych do obliczania rozkładu pola elektromagnetycznego. Jego artykuł *Finite-Element Solution of Homogeneous - Waveguide Problems*, zaprezentowany na sympozjum URSI (*Union Radio-Scientifique Internationale*) na temat fal

elektromagnetycznych w 1968 r., a później opublikowany we włoskim czasopiśmie technicznym *Alta Frequenza*, był zdecydowanie pierwszym zastosowaniem MES w obliczeniach dotyczących pola elektromagnetycznego [11]. Jego książka pt. *Finite Elements for Electrical Engineering*, napisana z Ronem Ferrarim, była przez wiele lat jedynym podręcznikiem na ten temat i została przetłumaczona na wiele języków [12].

Peter P. Silvester w 1978 roku założył Laboratorium Analizy Obliczeniowej i Projektowania (CAD-Lab) na Wydziale Elektrotechniki Uniwersytetu McGill, które obecnie stało się prawdopodobnie największą tego typu organizacją badawczą w Kanadzie i jedną z największych na świecie. Profesor Silvester był również organizatorem cyklicznej konferencji ELECTROSOFT, dotyczącej zastosowania technik informatycznych w elektrotechnice. Miał dobre i twórcze kontakty z polskimi badaczami – wspomnienie pośmiertne zostało napisane i opublikowane w Przeglądzie Elektrotechnicznym przez współautora tego artykułu [10] (rys.1).

Oprócz Profesora Silvestra, przedstawiciele wielu ośrodków badawczych w całym świecie przystąpili do intensywnych badań w obszarze zastosowań MES w analizie PEM, i tutaj można wymienić takich badaczy, jak T. Nakata (Japonia) [13-14], J.C. Sabbonadiere (Francja) [15], C.W. Trowbridge (Wielka Brytania) [16], A. Konrad (Kanada) [17], G. Molinari (Włochy) [18].

Powstawały bardzo zaawansowane prace z teorii MES, ale też szybko rozdziły się firmy komercyjne, które produkowały oprogramowanie inżynierskie. Jednymi z bardziej znanych na rynku softwarowym były Vector Fields Ltd., Magsoft czy Infolitica. Najpopularniejsze oprogramowania to PC-OPERA, OPERA-3D, TOSCA, CARMEN (Vector Fields), MAGNET (Infolitica), MAXWELL, FLUX2D, FLUX3D (Magsoft).



Rys.1. Peter P.Silvester i Andrzej Krawczyk podczas jednej z konferencji w początkach lat 90 [10]

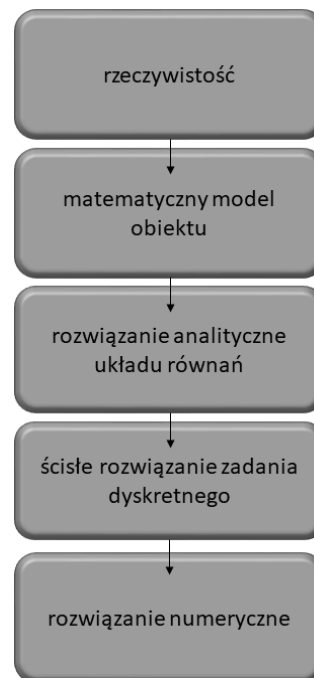
Wykorzystanie nowej metody w analizie pola elektromagnetycznego znalazło się w centrum uwagi naukowców, więc również polscy badacze nie mogli pozostać obojętni na postępy w tej dziedzinie. Podwaliny pod nowoczesny elektromagnetyzm obliczeniowy w Polsce zostały położone na przełomie lat 60. i 70. XX wieku przez profesorów: Janusza Turowskiego, Krystyna Pawluka i Ryszarda Sikorę i ich współpracowników [19-20]. Pierwsze polskie prace w zakresie teorii i zastosowania MES w analizie pola elektromagnetycznego rozpoczęły się w końcu lat siedemdziesiątych XX wieku. Najwięcej zaangażowania wykazywały uczelnie: Politechnika Warszawska,

Politechnika Szczecińska, oraz Instytut Elektrotechniki w Warszawie. Polscy badacze zaczęli uczestniczyć, szczególnie po zmianach politycznych w 1989 roku, w konferencjach międzynarodowych, takich jak COMPUMAG, INTERMAG, CEFC, ISEF i innych, gdzie zarówno poznawali najnowsze doniesienia o badaniach prowadzonych w ośrodkach zagranicznych, jak też prezentowali swoje osiągnięcia. Polscy uczeni publikowali wyniki swoich badań w renomowanych czasopismach światowych, przez co zaczęli być postrzegani jako istotni uczestnicy światowego rynku badawczego, a w niektórych podobzszarach tego rynku stawali się graczami wiodącymi. Przykładami dziedzin z wiodącą rolą badaczy polskich stały się: analiza pola elektromagnetycznego w obiektach mobilnych, analiza struktur bioelektromagnetycznych, analiza strumienia rozproszenia w transformatorze, itp. W mniejszym stopniu, głównie z powodu braków sprzętowych oraz słabego dofinansowania w Polsce sektora R&D, zajmowano się tworzeniem oprogramowania o charakterze użytkowym/komercyjnym. W omawianym okresie powstały dwa, stosunkowo duże, pakiety: SONMAP (System Oprogramowania Numerycznych Metod Analizy Pól), opracowany przez pracowników Politechniki Szczecińskiej i FAT (Field Analysis Translator), opracowany przez pracowników Politechniki Warszawskiej. SONMAP był kompletnym systemem obliczeniowym do analizy pola elektromagnetycznego niskiej częstotliwości w geometrii 2D. Kompletność systemu polegała na jego blokowym charakterze, na który składały się blok generatorów siatek elementów, blok rozwiązujący, wykorzystujący MES i metodę elementów brzegowych oraz blok wizualizacji i *post-processingu*. Był dostosowany do funkcjonowania w środowiskach operacyjnych DOS, Windows i Unix. Natomiast pierwsza stabilna wersja FAT powstała w 1989 roku. Program pozwalał na analizę i optymalizację dwuwymiarowych i osiowoosymetrycznych problemów elektrostatycznych, magnetostatycznych i zagadnień elektromagnetycznych.

W rozwoju elektromagnetyzmu obliczeniowego w Polsce istotne były wizyty studyjne polskich badaczy w zajmujących się tematyką MES ośrodkach światowych na przełomie lat 70. i 80., np. Andrzeja Krawczyka w Japonii (Uniwersytety Okayama i Kanazawa) i Wielkiej Brytanii (Uniwersytet w Southampton), czy Sławomira Wiaka w Wielkiej Brytanii (Uniwersytet w Southampton) i we Włoszech (Uniwersytet w Pavia). Pobyty polskich naukowców w renomowanych ośrodkach badawczych pozwoliły przenieść na grunt polski najnowsze rozwiązania teoretyczne i praktyczne. Pozwoliły one też zaznaczyć obecność polskich badań na arenie międzynarodowej. Wśród osób zaangażowanych w rozwój MES w analizach pola elektromagnetycznego nie można nie wymienić również takich nazwisk jak Stanisław Bolkowski, Krystyn Pawluk, Stanisław Wincenciak, Jan Sikora, Modest Gramz, Konstanty Gawrylczyk i wielu innych.

MES obecnie

Modelowanie z wykorzystaniem MES pozwala obecnie rozwiązać problemy, które są w zasadzie nierozwiązywalne na drodze analitycznej. Oczywiście uzyskane rozwiązanie numeryczne jest obarczone błędami wynikłymi z różnicy między modelem matematycznym a rzeczywistością, ale też różnicy pomiędzy modelem o strukturze ciągłej a modelem dyskretnym (np. siatka trójkątów w MES) (rys.2). Jednak suma tych rozbieżności przy aktualnych możliwościach obliczeniowych komputerów i dzięki dostępnemu oprogramowaniu jest minimalizowana.



Rys.2. Rozwiązanie numeryczne a odwzorowanie rzeczywistości [21]

Stosowanie pakietów obliczeniowych, bazujących na MES niesie szereg korzyści. Przede wszystkim, minimalizuje możliwość pomyłki. Wszystkie obliczenia wykonuje program, co niweluje czasochłonne obliczenia. W typowym systemie MES praca przebiega w trzech głównych etapach [21]. Pierwszy to etap budowy modelu i przygotowania do obliczeń (*preprocessing*), drugi to etap rozwiązywania (*solution*), a trzeci to przegląd i analiza wyników (*postprocessing*).

Większość aktualnego oprogramowania wyposażona jest w narzędzia do przygotowania modelu, jak również szeroki pakiet analizy wyników, z możliwością generowania raportów [22]. Na rynku dostępna jest szeroka gama programów wykorzystujących MES, m.in.: ABAQUS, ANSYS, NISA, MARC, COSMOS, ALGOR, ROBOT. Większość tych programów pozwala na importowanie zbiorów danych dotyczących geometrii modeli, tworzonych w systemach CAD.

Współcześnie MES jest już dobrze opracowana w aspekcie teoretycznym i stanowi podstawę wielu pakietów komercyjnych, dlatego aktywność badaczy koncentruje się na jej zastosowaniu w analizie pola elektromagnetycznego w urządzeniach elektrycznych, analizie zjawisk bioelektromagnetycznych, kompatybilności elektromagnetycznej czy telekomunikacji.

Podsumowanie

Metoda elementów skończonych w swojej 80-letniej historii stała się narzędziem obliczeniowym do analizy i modelowania naukowego szerokiego zakresu procesów fizycznych i zagadnień technicznych. MES znalazła zastosowanie w rozmaitych dziedzinach nauki i inżynierii do aproksymacji podstawowych równań różniczkowych fizyki matematycznej: w mechanice ciała odkształcalnego, w mechanice płynów, akustyce, elektromagnetyzmie, fizyce atomowej i medycynie.

Zaletą MES jest jej uniwersalność. Może być stosowana zarówno w zagadnieniach liniowych, jak i nieliniowych, w zagadnieniach stacjonarnych i niestacjonarnych, w obiektach o geometrii regularnej i skomplikowanej. Jakkolwiek na rynku informatycznym spotyka się pakiety

oprogramowania oparte na poprzednicze, czyli metodzie różnic skończonych, czy na następczyni, czyli metodzie elementów brzegowych, to dominacja metody elementów skończonych wydaje się niezagrażona.

Autorzy: dr inż. Ewa Łada-Tondyra, Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa, e-mail: e.lada-tondyra@pcz.pl, prof. dr hab. inż. Andrzej Krawczyk, Polskie Towarzystwo Zastosowań Elektromagnetyzmu, e-mail: ankra.new@gmail.com

LITERATURA

- [1] Krawczyk A., O metodach elementów i różnic skończonych na przykładzie wyznaczania pola elektrostatycznego, *Rozprawy Elektrotechniczne*, 29 (1983), z. 3, 679–688
- [2] Krawczyk A., Podstawy elektromagnetyzmu matematycznego, Instytut Naukowo-Badawczy ZTUREK (2001)
- [3] Balonek K., Gozdur S., Wprowadzenie do Metody Elementu Skończonego, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, AGH, Kraków (1999), Poland [dostęp: 1.09.2023]. Dostępny w internecie: <http://fatcat.ftj.agh.edu.pl/~i6balone/MES.pdf>
- [4] Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49 (1943), 1–23
- [5] Reid C., Courant. Springer Science & Business Media (1996)
- [6] Liu, W. K., Li, S., & Park, H. S., Eighty years of the finite element method: Birth, evolution, and future, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29.6 (2022), 4431-4453
- [7] Budzyński A., Krótki wstęp do zastosowania Metody Elementów Skończonych (MES) do numerycznych obliczeń inżynierskich, *Biuletyn GM View*, 5 (2006)
- [8] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics, London, UK: McGraw-Hill (1967)
- [9] Szmelter J., Programy Metody Elementów Skończonych, Wydawnictwo Arkady (1973)
- [10] Krawczyk, A., Peter Peet Silvester [1935-1996], *Przegląd Elektrotechniczny*, 73 (1997), 160
- [11] Silvester P. P., Finite-element solution of homogeneous waveguide problems, *Alta Frequenza*, 38 (1969), 313–317, 1969
- [12] Silvester, P.P., Chari M.Y.K., Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems, John Wiley & Sons Inc, (1980)
- [13] Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., Ahagon, A., 3-D finite element method for analyzing magnetic fields in electrical machines excited from voltage sources, *IEEE Transactions on Magnetics* 24.6 (1988), 2582-2584
- [14] Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., Muramatsu, K., Cheng, Z. G., Comparison of various methods for 3-D eddy current analysis, *IEEE Transactions on Magnetics*, 24.6 (1988), 3159-3161
- [15] Sabbonadiere, J. C., Poloujadoff M., Determination of Current Flow Lines and Characterization of Edge Effect in Linear Motors, *Revue Generale de L'Electricite* 80.1 (1971)
- [16] Trowbridge C. W., Low frequency electromagnetic field computation in three dimensions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52.1-3 (1985), 653-674
- [17] Konrad A., Eddy currents and modeling, *IEEE Transactions on Magnetics*, 21.5 (1985), 1805-1810
- [18] Molinari, J. F., Ortiz, M., Radovitzky, R., Repetto, E. A., Finite-element modeling of dry sliding wear in metals, *Engineering Computations*, 18.3/4 (2001), 592-610.
- [19] Sykulski, J. K., Krawczyk A., Wiak S., Computational electromagnetics in Poland: a review, *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 17.4 (1998), 427-438.
- [20] Krawczyk A., Korzeniewska E., Applied and computational electromagnetics in Poland on the 200 anniversary of the Oersted discovery, *Przegląd Elektrotechniczny*, 98 (2022), 173-176
- [21] Łączek S., Modelowanie i analiza konstrukcji w systemie MES ANSYS v.11 wydawnictwo: Politechnika Krakowska Wydawnictwo PK, 2011
- [22] Skrobol A., Raport: Programy MES. Programy do analiz metodą elementów skończonych, *Projektowanie i Konstrukcje Inżynierskie*, 1/2 (2010)